

## Aplicación de cadenas de Markov para proyecciones demográficas en áreas geopolíticas menores

**Virgilio Partida Bush\***

*Se presenta el uso de cadenas de Markov para proyectar la población en áreas geopolíticas menores. El método consiste en proyectar sólo la distribución relativa que, aplicada a una proyección demográfica previa, arroja la población en subregiones. Se desarrolla un algoritmo que permite estimar las probabilidades de transición para la cadena a partir de datos de fácil disponibilidad: la población total residente en dos o más regiones o estados en sólo dos momentos en el tiempo. Una vez determinadas esas probabilidades, su proyección y la correspondiente a la distribución relativa es directa. La aplicación del método se hace con la zona metropolitana de la ciudad de México, para la cual se proyecta su población y extensión territorial. En una segunda aplicación se proyecta sólo la población para tres contornos en que se ha dividido a la metrópoli.*

### **Introducción**

El mejor método para proyectar la población de un territorio es indudablemente el de las componentes demográficas. El procedimiento consiste en hacer previsiones, por edad y sexo, de la intensidad relativa de las tres variables o componentes demográficas fundamentales: la fecundidad, la mortalidad y la migración, las cuales, aplicadas a una población inicial, permiten proyectar cada una de las generaciones existentes al comienzo del proceso y determinar las nuevas cohortes que se vayan incorporando, es decir, los nacimientos que irán ocurriendo a lo largo del periodo de proyección.

Las previsiones de los patrones demográficos por edad y sexo generalmente se hacen a partir de las tendencias pasadas, obtenidas de gran cantidad de datos que muchas veces se deben evaluar y corregir. Siendo este el panorama, la aplicación óptima del método de proyección de las componentes depende entonces de la disponibilidad de esos datos.

Este método ha sido exitosa y ampliamente difundido para proyecciones nacionales de población; incluso para áreas mayo-

\* Coordinador de la Maestría en Demografía del Centro de Estudios Demográficos y de Desarrollo Urbano de El Colegio de México.

res de un país se dispone del modelo multirregional de Rogers (1975), que consiste de una extensión del método de componentes demográficas que incorpora las migraciones internas como flujos direccionados.<sup>1</sup>

En el caso de muchos países, como México, es difícil, a veces imposible, aplicar el método de las componentes para unidades geográficas menores, porque no se dispone de los datos necesarios para estimar las tendencias pasadas de los patrones demográficos por edad y sexo.

Rogers (1968) diseñó previamente un modelo multirregional más simple, que utiliza sólo medidas globales para los tres fenómenos demográficos, es decir, no toma en cuenta la edad ni el sexo de la población. Sin embargo, este modelo presenta una limitación conceptual: las medidas globales son la media de las correspondientes a la edad y el sexo, ponderadas por la distribución por edad y sexo de la población; o en otros términos, la alternativa trabaja con los resultados de la dinámica demográfica en lugar de hacerlo con los insumos.

Ante la carencia de datos incluso para aplicar el modelo multirregional restringido, la mayoría de las estrategias diseñadas para proyectar la población en áreas geopolíticas menores, se basan en la simple previsión de la tasa media anual de crecimiento. Por ello el conflicto conceptual es mayor ya que, en tanto medida global, esa tasa es el resultado de *toda* la dinámica demográfica.

Cuando se carece de datos demográficos adecuados para hacer proyecciones subnacionales de población se recurre a otro procedimiento, que consiste en hacer previsiones sólo de la distribución territorial interna de los habitantes en un área geográfica mayor, de manera que, al aplicar esa distribución relativa al total previamente proyectado para el área mayor, se obtiene la población de cada una de sus áreas geopolíticas menores. Este procedimiento se puede enmarcar dentro de los métodos conocidos comúnmente como proyecciones derivadas.

En ese sentido apunta este artículo. Se sugiere el empleo de *cadena de Markov* como alternativa para proyectar la distribución territorial de la población. El método se utiliza para proyectar la población y la extensión territorial de la zona metropolitana de la ciudad de México (ZMCM), pudiéndose extender fácilmente al caso de municipios e incluso al de localidades.

Los algoritmos que se presentan son de aplicación sencilla, sobre todo en la actualidad, cuando es fácil disponer de una microcomputadora: sólo se requiere conocer el número de habitantes de

<sup>1</sup> Migración interna es la que ocurre sólo dentro de las fronteras de un país.

cada unidad territorial en dos momentos sucesivos en el tiempo (por ejemplo, las poblaciones captadas por dos censos consecutivos de población), pudiéndose aplicar prácticamente a cualquier situación empírica.

**Procesos estocásticos de Markov.  
Estimación de las probabilidades de transición**

En esta sección se presentan los procesos estocásticos de Markov y su solución. En el primer apartado se describe el proceso como convirtiendo un arreglo de doble entrada en un modelo probabilístico en el tiempo; en el segundo se discute la solución algebraica simple basada en dos distribuciones relativas en el tiempo; en el tercero se ofrece una solución factible, y en el cuarto se presenta un algoritmo que permite corregir un error generalmente presente en la solución sugerida en el segundo apartado.

*Los procesos estocásticos de Markov*

Considérese un conjunto finito de  $N$  elementos, clasificados en  $n$  categorías o estados, mutuamente excluyentes y exhaustivos, en dos momentos en el tiempo, digamos  $t$  y  $t + h$ . Sean  $N_i(u)$  los elementos pertenecientes al estado  $i$  al tiempo  $u$  y  $N_{ij}$  las transiciones del estado  $i$  al tiempo  $t$  al estado  $j$  al tiempo  $t + h$ . Definidos de esta manera, los  $N$  elementos se pueden clasificar en un arreglo de cuadro de doble entrada de la siguiente manera:

Estado de destino ( $t + h$ )	Estado de origen (tiempo $t$ )					Total
	1	2	3	...	$n$	
1	$N_{11}$	$N_{21}$	$N_{31}$	...	$N_{n1}$	$N_1(t + h)$
2	$N_{12}$	$N_{22}$	$N_{32}$	...	$N_{n2}$	$N_2(t + h)$
3	$N_{13}$	$N_{23}$	$N_{33}$	...	$N_{n3}$	$N_3(t + h)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$N_{1n}$	$N_{2n}$	$N_{3n}$	...	$N_{nn}$	$N_n(t + h)$
Total	$N_1(t)$	$N_2(t)$	$N_3(t)$	...	$N_n(t)$	$N$

Este arreglo se puede presentar también en términos relativos dividiendo todas y cada una de las casillas entre el total  $N$ :

Estado de destino ( $t+h$ )	Estado de origen (tiempo $t$ )					
	1	2	3	...	$n$	Total
1	$c_{11}$	$c_{21}$	$c_{31}$	...	$c_{n1}$	$c_1(t+h)$
2	$c_{12}$	$c_{22}$	$c_{32}$	...	$c_{n2}$	$c_2(t+h)$
3	$c_{13}$	$c_{23}$	$c_{33}$	...	$c_{n3}$	$c_3(t+h)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$c_{1n}$	$c_{2n}$	$c_{3n}$	...	$c_{nn}$	$c_n(t+h)$
Total	$c_1(t)$	$c_2(t)$	$c_3(t)$	...	$c_n(t)$	1

(1)

Para cualquiera de las transiciones absolutas  $N_{ij}$  o relativas  $c_{ij}$  se puede calcular la proporción de elementos que cambian del estado  $i$  al estado  $j$ , al cabo del periodo  $h$ :

$$p_{ij} = N_{ij}/N_i(t) = c_{ij}/c_i(t). \quad (2)$$

Dada la equivalencia entre una distribución relativa y una distribución de probabilidad, cualquiera de los marginales, columna o renglón  $c_i(u)$  del arreglo (1) expresa también la probabilidad que tiene un elemento de encontrarse en el estado  $i$  al tiempo  $u$ . De la misma manera, la proporción  $p_{ij}$  en (2) representa también la probabilidad que un elemento perteneciente al estado  $i$  al tiempo  $t$  tiene de encontrarse en el estado  $j$  al cabo del periodo  $h$ , pues es el cociente de casos favorables entre casos posibles.

Sustituyendo (2) en cualquiera de los marginales renglón del arreglo (1) se tiene:

$$c_j(t+h) = \sum_{i=1}^n c_{ij} = \sum_{i=1}^n p_{ij}c_i(t) \text{ para toda } j, \quad (3)$$

sujeta a la restricción, por la definición de marginal columna y (2):

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \text{ para toda } i. \quad (4)$$

Definiendo el vector columna  $\bar{c}(u)$  y la matriz  $P$  como:

$$\bar{c}(u) = \begin{bmatrix} c_1(u) \\ c_2(u) \\ c_3(u) \\ \vdots \\ c_n(u) \end{bmatrix} \text{ y } P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} & \cdots & p_{n2} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & \cdots & p_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & p_{3n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad (5)$$

el sistema de ecuaciones (3) se puede expresar como la siguiente operación matricial:

$$\bar{c}(t + h) = \mathbf{P} \cdot \bar{c}(t). \quad (6)$$

Dado que tanto los vectores  $\bar{c}(t)$  y  $\bar{c}(t + h)$  como la matriz  $\mathbf{P}$  contienen probabilidades, al proceso que representa esta última ecuación se le conoce comúnmente como *proceso estocástico* (Kemeny *et al.*, 1970, pp. 445-506; Hoel *et al.*, 1972).

La propiedad o supuesto de Markov consiste en asumir que las probabilidades de transición sólo *dependen* del estado en que se encuentra el elemento al inicio de un periodo  $h$ , y no de su historia previa (estados a que haya pertenecido). Si se acepta el supuesto de Markov, denotando por  $\mathbf{P}(k)$  la matriz de probabilidades de transición para el  $k$ -ésimo intervalo de longitud  $h$ , posterior al tiempo  $t$ , aplicando dos veces (6):

$$\bar{c}(t + 2h) = \mathbf{P}(2) \cdot \bar{c}(t + h) = \mathbf{P}(2) \cdot \mathbf{P}(1) \cdot \bar{c}(t)$$

desprendiéndose fácilmente la generalización para  $m$  periodos:

$$\bar{c}(t + mh) = \mathbf{P}(m) \cdot \mathbf{P}(m-1) \cdot \mathbf{P}(m-2) \dots \cdot \mathbf{P}(2) \cdot \mathbf{P}(1) \cdot \bar{c}(t) \quad (7)$$

Al proceso probabilístico expresado por esta última ecuación se le conoce como *proceso estocástico* o *cadena de Markov*, donde el término *cadena* se debe a la liga de varios periodos. Incluso si se supone que las probabilidades de transición permanecen constantes a lo largo del tiempo, entonces el proceso se convierte simplemente en:

$$\bar{c}(t + mh) = \mathbf{P}^n \cdot \bar{c}(t) \quad (8)$$

La utilidad del modelo de cadenas de Markov para proyecciones es bastante clara: proyectando las probabilidades de transición para cada periodo futuro, se obtiene directamente la distribución de los elementos en las  $n$  categorías utilizadas. El problema consiste entonces en disponer de una serie temporal de probabilidades para el pasado que permita proyectar su futuro comportamiento. Se dice *problema* porque generalmente se dispone de las distribuciones relativas  $c_i(u)$  y rara vez de las probabilidades de transición  $p_{ij}$ .

Es necesario entonces encontrar algún algoritmo que permita convertir las distribuciones relativas observadas, en dos momentos en el tiempo, en las probabilidades de transición para el perio-

do comprendido. La solución no es única, e incluso las diferentes alternativas generalmente dependen del tipo de datos de que se dispone.

### *Solución algebraica simple*

Considérese primero el caso más simple: un proceso estocástico de sólo dos estados ( $n = 2$ ). Dado este esquema, para dos distribuciones relativas observadas en dos momentos sucesivos en el tiempo se tiene:

$$c_1(t+h) = p_{11} \cdot c_1(t) + p_{21} \cdot c_2(t),$$

y,

$$c_2(t+h) = p_{12} \cdot c_1(t) + p_{22} \cdot c_2(t).$$

Por un teorema fundamental del álgebra, a simple vista este sistema de ecuaciones no tiene solución única, ya que el número de incógnitas (las cuatro probabilidades) es mayor que el de ecuaciones. Sin embargo, aprovechando la propiedad (4):  $p_{11} + p_{12} = 1$  y  $p_{21} + p_{22} = 1$ , sustituyendo en la segunda ecuación y reagrupando términos:

$$c_2(t+h) = 1 - p_{11} \cdot c_1(t) - p_{21} \cdot c_2(t)$$

que junto con la primera constituyen un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. No obstante, otra restricción del álgebra elemental establece que un sistema de ecuaciones tiene solución única, si y sólo si todos los coeficientes de las incógnitas *no son igualmente proporcionales*, es decir, los vectores que representan a las ecuaciones deben ser *linealmente independientes*.

Claramente, el sistema de ecuaciones anterior no satisface esta última condición, ya que los coeficientes no sólo son igualmente proporcionales, sino incluso iguales; además, dado que  $c_1(t) + c_2(t) = 1$ , la segunda ecuación es igual a la primera:

$$c_1(t+h) = 1 - c_2(t+h) = p_{11} \cdot c_1(t) + p_{12} \cdot c_2(t)$$

Para resolver el sistema se requiere entonces de una observación adicional:

$$\begin{aligned} c_1(t+h) &= p_{11} \cdot c_1(t) + p_{21} \cdot c_2(t) \\ c_1(t+2h) &= p_{11} \cdot c_1(t+h) + p_{21} \cdot c_2(t+h) \end{aligned}$$

Conviene destacar dos aspectos de este nuevo sistema de ecuaciones:

- i) La solución no es única si y sólo si  $c_1(t+h)/c_1(t) = c_2(t+h)/c_2(t)$ . Esta condición es posible únicamente si ambos cocientes son iguales a uno, ya que la proporción en cualquiera de los estados (1 o 2) es el complemento a la unidad de la correspondiente al otro. Si ambos cocientes fueran iguales a uno, se tendría que la distribución de los elementos es constante con respecto al tiempo, proceso conocido como *estacionario*, para el cual no existe solución única. En la realidad es difícil encontrar un caso estacionario, quedando entonces prácticamente garantizada la solución única.
- ii) Al establecer de esa manera el sistema de ecuaciones, se está suponiendo que las probabilidades de transición permanecen constantes durante los dos periodos  $h$ .

La generalización a  $n$  estados requiere establecer tantas ecuaciones simultáneas como probabilidades de transición se necesiten. Si bien pareciera que el número de incógnitas es  $n \cdot n$ , realmente sólo asciende a  $n(n-1)$ , porque dada la propiedad (4) para los  $n$  valores de  $i$ , se pueden liberar  $n$  incógnitas. Para estructurar el sistema de ecuaciones simultáneas se necesitan entonces las distribuciones relativas observadas para  $n(n-1) + 1$  momentos en el tiempo. Esta solución puede no ser plausible, pues si, por ejemplo, se utilizan 8 categorías, se requiere un gran total de  $8 \cdot 7 + 1 = 57$  observaciones, las cuales seguramente provendrían de encuestas censales o por muestreo, y ningún país en el mundo dispone de tal acervo estadístico.<sup>2</sup>

Un algoritmo alternativo consiste en mantener las  $n \cdot n$  incógnitas, pero estructurando un sistema de sólo  $n$  ecuaciones simultáneas para cada conjunto de igualdades (3), correspondiente a cada uno de los renglones  $j$ ; de esta manera se requieren sólo  $n + 1$  observaciones en el tiempo. Esta solución, si bien satisface la propiedad (4) para cada columna  $i$ , requiere del supuesto que las probabilidades de transición se mantienen constante durante los  $n$  periodos  $h$ .

Esta última limitación puede no ser realista en un caso concreto, siendo entonces necesario buscar una solución más adecuada. Además, al ser una solución irrestricta, pueden tenerse valo-

<sup>2</sup> Asumiendo una periodicidad quinquenal ( $h$ ), se requieren observaciones para 285 años, aproximadamente desde 1700.

res para las incógnitas menores que cero o mayores que uno, esto es, violar el primer axioma de la probabilidad.

*La solución propuesta por Lerda*

Lerda (1967) ofrece un algoritmo que permite deducir un conjunto único de probabilidades de transición para cada periodo  $h$ . La solución consiste en dividir la matriz de probabilidades en una triangular superior  $PS$  y una triangular inferior  $PI$ :

$$PS = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} & \cdots & p_{n1} \\ 0 & p_{22} & p_{32} & \cdots & p_{n2} \\ 0 & 0 & p_{33} & \cdots & p_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad PI = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_{12} & p_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} & p_{3n} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

de tal manera que algún tipo de combinación de ambas proporcione la matriz completa  $P$ .

El problema consiste en determinar las matrices  $PS$  y  $PI$ , para lo cual supóngase que la probabilidad  $p_{ij}$  se puede expresar como el producto de dos factores  $\alpha_i$  y  $\beta_j$ :

$$p_{ij} = \alpha_i \cdot \beta_j. \quad (9)$$

Para la matriz superior  $PS$  se tienen las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \alpha_i \cdot \beta_j = 0 \quad \text{para } i < j \\ 0 &\leq \alpha_i \cdot \beta_j \leq 1 \quad \text{para } i \geq j \\ \alpha_i \cdot \beta_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^i \alpha_i \cdot \beta_j = 1 \quad \text{para toda } i$$

De esta última restricción se tiene:

$$\alpha_i \cdot \sum_{j=1}^i \beta_j = 1 \quad \text{o bien} \quad \alpha_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^i \beta_j} \quad (10)$$



Es claro que se necesita establecer alguna condición adicional para encontrar la solución a los coeficientes  $\alpha_i$  y  $\beta_j$ . Haciendo  $\alpha_n = 1$ , por la primera igualdad en (10) y las propiedades de la sumatoria:

$$1 = \sum_{j=1}^n \beta_j = \sum_{j=1}^i \beta_j + \sum_{j=i+1}^n \beta_j \text{ o bien } \sum_{j=1}^i \beta_j = 1 - \sum_{j=i+1}^n \beta_j$$

de donde, sustituyendo en la segunda igualdad en (10):

$$\alpha_i = \frac{1}{1 - \sum_{j=i+1}^n \beta_j} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (11)$$

$$\alpha_n = 1$$

Una vez obtenida la solución para las  $\alpha_i$  es necesario encontrar la correspondiente a las  $\beta_j$ . Dado que  $p_{in} = 0$  para  $1 < n$  por la primera restricción, y que  $\alpha_n = 1$ :

$$c_n(t+h) = p_{nn} \cdot c_n(t) = \alpha_n \cdot \beta_n \cdot c_n(t) = \beta_n \cdot c_n(t)$$

de donde,

$$\beta_n = c_n(t+h)/c_n(t)$$

De la igualdad (3) y la definición (9):

$$c_j(t+h) = \sum_{i=j}^n \alpha_i \cdot \beta_j \cdot c_i(t) = \beta_j \cdot \sum_{i=j}^n \alpha_i \cdot c_i(t)$$

$$c_j(t+h) = \beta_j \cdot \left[ \alpha_j \cdot c_j(t) + \sum_{i=j+1}^n \alpha_i \cdot c_i(t) \right] = \beta_j \cdot \left[ \frac{c_j(t)}{1 - \sum_{k=j+1}^n \beta_k} + \frac{c_j(t+h)}{\beta_{j+1}} \right]$$

de donde,

$$\beta_j = \frac{c_j(t+h) \cdot \beta_{j+1} \cdot \left[ 1 - \sum_{k=j+1}^n \beta_k \right]}{c_{j+1}(t+h) \cdot \left[ 1 - \sum_{k=j+1}^n \beta_k \right] + c_j(t) \cdot \beta_{j+1}} \quad \text{para } j \leq n-1 \quad (12)$$

$$\beta_n = c_n(t+h)/c_n(t)$$

Aplicando la segunda igualdad se obtiene  $\beta_n$  y regresivamente la primera los restantes valores de  $\beta_j$ ; y con (11) todos los de  $\alpha_i$ , teniéndose así la solución para la matriz triangular superior a partir de (9).

Para la matriz inferior **PI** se tienen las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} p_{ij} &= \alpha_i \cdot \beta_j = 0 \text{ para } 1 > j \\ 0 &\leq \alpha_i \cdot \beta_j \leq 1 \text{ para } i \leq j \\ \alpha_n \cdot \beta_n &= 1 \\ \sum_{j=i}^n \alpha_i \cdot \beta_j &\leq 1 \text{ para toda } i \end{aligned}$$

y haciendo  $\alpha_1 = 1$ , se obtienen igualdades equivalentes a (11) y (12):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1 \\ \alpha_i &= \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j} \text{ para } i = 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 &= c_1(t+h)/c_1(t) \\ \beta_j &= \frac{c_j(t+h) \cdot \beta_{j-1} \cdot \left[ 1 - \sum_{k=1}^{j-1} \beta_k \right]}{c_{j-1}(t+h) \cdot \left[ 1 - \sum_{k=1}^{j-1} \beta_k \right] + c_j(t) \cdot \beta_{j-1}} \text{ para } 2 \leq j \leq n \end{aligned} \quad (14)$$

No obstante, este algoritmo presenta una limitación: siendo  $p_{nn} = \beta_n = c_n(t+h)/c_n(t)$  para la matriz superior y  $p_{11} = \beta_1 = c_1(t+h)/c_1(t)$  para la matriz inferior, cualquiera de ellas, o ambas, pueden ser mayores que la unidad, y dado el mecanismo que desencadenan, también las restantes probabilidades pueden ser mayores que una e incluso negativas, violándose entonces el *primer axioma de la probabilidad*.

Una forma de satisfacer ese axioma es mediante el complemento a la unidad de las distribuciones relativas:  $d_i(u) = 1 - c_i(u)$ ; y reemplazando las  $c_i(u)$  por las  $d_i(u)$  en (12) o (14). Al utilizar esta alternativa se tiene que la suma de los complementos ya no es la unidad:

$$\sum_{i=1}^n d_i(u) = n-1$$

que equivale a tomar marginales expandidos del tipo  $N_i(u)$ . Este hecho no presenta problema alguno para la estimación de cualquiera de las matrices triangulares superior o inferior, porque la expansión en  $n-1$  se cancela en la aplicación de (12) y (14) al determinar las  $\beta_j$ , y por ende tampoco afectan los valores de las  $\alpha_i$ .

Para obtener la matriz completa de probabilidades como la combinación de las matrices superior e inferior, se considerarán cuatro posibilidades:

- a) Ambas matrices se obtuvieron utilizando las distribuciones originales.
- b) Ambas matrices se obtuvieron con los complementos a la unidad.
- c) La superior con las originales y la inferior con los complementos.
- d) La superior con los complementos y la inferior con los originales.

Antes de pasar a ver cada una de las soluciones, considérese el caso en que se hayan utilizado los complementos. Para eso, sea  $\mathbf{1}$  el vector columna unitario y  $\bar{d}(u)$  el vector columna de complementos:  $\bar{d}(u) = \mathbf{1} - \bar{c}(u)$ .

- a) *Ambas matrices se obtuvieron utilizando las distribuciones originales.*

En este caso se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{c}(t+h) &= \mathbf{PS} \cdot \bar{c}(t), \text{ y} \\ \bar{c}(t+h) &= \mathbf{PI} \cdot \bar{c}(t) \end{aligned}$$

de donde, tomando la media aritmética de ambas igualdades se tiene:

$$\bar{c}(t+h) = \mathbf{P} \cdot \bar{c}(t) \text{ con } \mathbf{P} = \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{PS} + \mathbf{PI}]$$

- b) *Ambas matrices se obtuvieron utilizando los complementos a la unidad.*

En este caso se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{d}(t+h) &= \mathbf{PS} \cdot \bar{d}(t), \text{ y} \\ \bar{d}(t+h) &= \mathbf{PI} \cdot \bar{d}(t) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \mathbf{1} - \bar{c}(t+h) &= \mathbf{PS} \cdot [\mathbf{1} - \bar{c}(t)] \\ \mathbf{1} - \bar{c}(t+h) &= \mathbf{PI} \cdot [\mathbf{1} - \bar{c}(t)] \end{aligned}$$

y, tomando la media aritmética:

$$1 - \bar{c}(t+h) = P \cdot [1 - \bar{c}(t)]$$

o bien,

$c(t+h) = P \cdot \bar{c}(t) + e$  con  $P = \frac{1}{2} \cdot [PS + PI]$ ,  $e = [I + P] \cdot 1$  e  $I$  la matriz identidad, donde  $e$  es un vector de error. Esta solución no satisface (6) y se requiere un algoritmo adicional para eliminar el error  $e$ .

c) *La superior con las originales y la inferior con los complementos.*

En este caso se tiene:

$$\begin{aligned} \bar{c}(t+h) &= PS \cdot \bar{c}(t), \text{ y,} \\ \bar{d}(t+h) &= PI \cdot \bar{d}(t) \end{aligned}$$

de donde,

$$\bar{c}(t+h) = [I - PI] \cdot 1 + PI \cdot \bar{c}(t)$$

y, tomando la media aritmética:

$$\bar{c}(t+h) = P \cdot \bar{c}(t) + e \text{ con } P = \frac{1}{2} \cdot [PS + PI] \text{ y } e = \frac{1}{2} \cdot [I + PI] \cdot 1$$

d) *La superior con los complementos y la inferior con las originales.*

Para este caso la solución es:

$$\bar{c}(t+h) = P \cdot \bar{c}(t) + e \text{ con } P = \frac{1}{2} \cdot [PS + PI] \text{ y } e = \frac{1}{2} \cdot [I + PS] \cdot 1$$

Dentro de las diferentes alternativas para eliminar el error  $e$  en los tres últimos casos, aquí se ha elegido una de asignación biproportional iterativa.<sup>3</sup>

#### *El método de asignación biproportional iterativa de Nair*

Dentro de la variedad de métodos, el de Nair (1985) presenta la ventaja de que converge en un menor número de iteraciones o pasos. El algoritmo parte del conocimiento de los marginales colum-

<sup>3</sup> Willekens (1982) ofrece varios algoritmos de asignación biproportional iterativa.

na  $c_i(t)$  y renglón  $c_j(t+h)$  y de un arreglo inicial de transiciones  $c^0_{ij}$ , representativo de las condiciones empíricas para las que se aplica el proceso estocástico. El procedimiento consiste en obtener un juego de ponderadores  $r_i$  y  $w_j$ , que aplicados al arreglo inicial:

$$c_{ij} = r_i \cdot w_j \cdot c^0_{ij}, \tag{15}$$

arrojen uno tal que satisfaga tanto los marginales renglón como los columna observados, es decir, sujeto a las restricciones:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = c_i(t) \text{ y } \sum_{i=1}^n c_{ij} = c_j(t+h)$$

Incorporando (15) en la segunda restricción:

$$c_j(t+h) = \sum_{i=1}^n r_i \cdot w_j \cdot c^0_{ij} = w_j \cdot \sum_{i=1}^n r_i \cdot c^0_{ij},$$

de donde

$$w_j = \frac{c_j(t+h)}{\sum_{i=1}^n r_i \cdot c^0_{ij}} \tag{16}$$

De la misma manera, incorporando (15) en la primera restricción:

$$r_i = \frac{c_i(t)}{\sum_{j=1}^n w_j \cdot c^0_{ij}} \tag{17}$$

El procedimiento inicia asignando valores arbitrarios para los ponderadores  $r_i$  (generalmente todos iguales a uno), ya que la solución no depende de su valor inicial. Aplicando (16) se obtiene el juego de ponderadores  $w_j$ , y con ellos y (17) nuevos valores para las  $r_i$ . El proceso se repite hasta que el arreglo converge: hasta que satisfaga todos los marginales conocidos, tanto los renglón como los columna.

Debido a que el proceso generalmente no converge en un número finito de iteraciones, es necesario entonces fijar un criterio arbitrario para detenerlo; establecer una constante  $\epsilon$  tal que:

$$|c^k_i(t) - c_i(t)| < \epsilon \text{ y } |c^k_j(t+h) - c_j(t+h)| < \epsilon, \text{ o,}$$

$$|r^k_i / r^{k-1}_i - 1| < \epsilon \text{ y } |w^k_j / w^{k-1}_j - 1| < \epsilon \text{ para toda } i \text{ y } j \text{ donde el sobre-índice } k \text{ denota la } k\text{-ésima iteración.}$$

Una vez obtenidos el juego de ponderadores  $r_i$  y  $w_j$ , mediante (15) y (2) se determinan las probabilidades de transición  $p_{ij}$ . El arreglo inicial se puede deducir a partir de las probabilidades obtenidas del método de Lerda:  $c^o_{ij} = p^o_{ij} \cdot c_i(t)$ ; donde  $p^o_{ij}$  es la probabilidad en la matriz estimada como la media aritmética de las triangulares superior e inferior.

### **Aplicación al caso de la zona metropolitana de la ciudad de México**

La aplicación de los procesos estocásticos de Markov, para la proyección de la población de áreas geopolíticas menores, se hizo con la zona metropolitana de la ciudad de México (ZMCM), la cual se encuentra contenida en la región formada por el Distrito Federal y el Estado de México, región que en lo sucesivo se denominará *Valle de México*.

La primera aplicación, que se presenta en el apartado inicial de esta sección, corresponde a la proyección del volumen de habitantes y de la extensión territorial (en kilómetros cuadrados) que eventualmente iría alcanzando la capital del país. La otra aplicación, mostrada en el siguiente apartado, consiste en la proyección de la población en tres zonas o *contornos* en que se ha dividido a la ZMCM.

#### *Proyección de la población y superficie de la ZMCM*

Para esta proyección se ha dividido el Valle de México en dos subregiones o estados, mutuamente excluyentes y exhaustivos:

1. La zona metropolitana de la ciudad de México (ZMCM).
2. El resto del Valle de México.

La evolución de la extensión territorial de la ZMCM en el periodo 1960-1980 se presenta en la figura 1, y los datos para aplicar el modelo de procesos estocásticos de Markov, tanto en este apartado como en el siguiente, en el cuadro 1.

Las probabilidades de transición para la población de las dos subregiones, obtenidas de la aplicación de los métodos de Lerda (1967) y de Nair (1985), se muestran en el lado izquierdo de la primera parte del cuadro 2.

Se observa, en primer término, que la probabilidad de transición de la población del Valle de México hacia la ZMCM fue 12 veces mayor que en sentido opuesto en la década de los sesenta

FIGURA 1  
Evolución de la zona metropolitana de la ciudad de México, 1960-1980

Ciudad central	Primer contorno	Segundo contorno
<i>Unidades geopolíticas en 1960:</i>		
Benito Juárez <sup>d</sup>	Álvaro Obregón <sup>d</sup>	Magdalena Contreras <sup>d</sup>
Cuauhtémoc <sup>d</sup>	Azcapotzalco <sup>d</sup>	Chimalhuacán <sup>m</sup>
Miguel Hidalgo <sup>d</sup>	Coyoacán <sup>d</sup>	Ecatepec <sup>m</sup>
Venustiano Carranza <sup>d</sup>	Cuajimalpa <sup>d</sup>	Tlalnepantla <sup>m</sup>
	Gustavo A. Madero <sup>d</sup>	
	Iztacalco <sup>d</sup>	
	Iztapalapa <sup>d</sup>	
	Naucalpan <sup>m</sup>	
	Nezahualcóyotl <sup>m</sup>	
<i>Unidades geopolíticas incorporadas en 1970:</i>		
	Tlalpan <sup>d</sup>	Tláhuac <sup>d</sup>
	Xochimilco <sup>d</sup>	Atizapán de Zaragoza <sup>m</sup>
		Coacalco <sup>m</sup>
		Cuautitlán Izcalli <sup>m</sup>
		Cuautitlán R. Rubio <sup>m</sup>
		Huixquilucan <sup>m</sup>
		La Paz <sup>m</sup>
		Tultitlán <sup>m</sup>
<i>Unidades geopolíticas incorporadas en 1980:</i>		
		Milpa Alta <sup>d</sup>
		Atenco <sup>m</sup>
		Chalco <sup>m</sup>
		Chiautla <sup>m</sup>
		Chicoloapan <sup>m</sup>
		Chiconcuac <sup>m</sup>
		Ixtapaluca <sup>m</sup>
		Nicolás Romero <sup>m</sup>
		Tecámac <sup>m</sup>
		Texcoco <sup>m</sup>

<sup>d</sup> Delegaciones del Distrito Federal.

<sup>m</sup> Municipios del Estado de México.

Fuente: Negrete y Salazar (1987), p. 128.

(0.46898/0.03896), y poco más de 14 veces en el siguiente decenio. Ambas probabilidades se redujeron alrededor de la mitad de la primera a la segunda décadas: 48.4% del resto del Valle hacia la ZMCM y 56.5% en sentido opuesto.

El procedimiento para proyectar la población de la ZMCM consistió en proyectar primero, a partir del modelo de procesos

## CUADRO 1

**Población y superficie del Valle de México, zona metropolitana de la ciudad de México y resto del Valle de México, 1960-1980**

Año	Valle de México	Resto del Valle	Zona metropolitana de la ciudad de México			
			Total	Ciudad central	Primer contorno	Segundo contorno
<i>Población censada<sup>1</sup></i>						
1960	6 768 727	1 387 574	5 381 153	2 829 756	2 199 556	351 841
1970	10 707 350	1 496 497	9 210 853	3 002 984	4 874 557	1 333 312
1980	16 395 414	1 974 960	14 420 454	2 686 499	7 636 474	4 097 481
<i>Población media corregida<sup>2</sup></i>						
1960	7 208 005	1 477 625	5 730 380	3 013 402	2 342 303	374 675
1970	11 581 948	1 618 734	9 963 214	3 248 274	5 272 720	1 442 220
1980	17 084 195	2 057 929	15 026 266	2 799 360	7 957 287	4 269 619
<i>Distribución espacial de la población (%<sup>3</sup>)</i>						
1960	100.00	20.50	79.50	52.59	40.88	6.54
1970	100.00	13.98	86.02	32.60	52.92	14.48
1980	100.00	12.05	87.95	18.63	52.96	28.41
<i>Superficie (km<sup>2</sup>)</i>						
1960	22 963.92	21 375.80	1 588.12	135.50	708.30	744.32
1970	22 963.92	20 836.42	2 127.50	135.50	708.30	1 283.70
1980	22 963.92	18 999.57	3 964.35	135.50	708.30	3 120.55
<i>Distribución territorial de la superficie (%<sup>3</sup>)</i>						
1960	100.00	93.08	6.92	8.53	44.60	46.87
1970	100.00	90.74	9.26	6.37	33.29	60.34
1980	100.00	82.74	17.26	3.42	17.87	78.72

<sup>1</sup> Negrete y Salazar (1987), p. 128.<sup>2</sup> Población censada corregida por los factores estimados por Gómez de León y Partida (1986): 1.065 (1960), 1.082 (1970) y 1.042 (1980).<sup>3</sup> Para los contornos sobre la base de 100 para la ZMCM.

estocásticos, la distribución territorial de los habitantes del Valle de México en las dos subregiones (ZMCM y resto del Valle) de 1980 a 2010 y después aplicarlas a las proyecciones oficiales vigentes (INEGI y Conapo, 1985), utilizando la hipótesis *alternativa* de fecundidad futura, debido a que ésta refleja de manera más adecuada los recientes hallazgos en la tendencia temporal del fenómeno (SSA, 1988).

Una primera posibilidad es reproducir, para cada decenio futuro e iniciando en 1980, la razón de cambio observada en las pro-



**CUADRO 2**  
**Proyección de la población y de la superficie del Valle de México,**  
**1980-2010**

Subregión de destino	Probabilidades de transición					
	Población		Superficie			
	Subregión de origen		Subregión de origen			
	ZMCM	Resto del Valle	ZMCM	Resto del Valle		
1960-1970						
ZMCM	.96104	.46898	1.00000	.02523		
Resto	.03896	.53102	.00000	.97477		
1970-1980						
ZMCM	.98304	.24187	1.00000	.08816		
Resto	.01696	.75813	.00000	.91184		
Quinquenales de proyección constantes						
ZMCM	.99089	.12997	1.00000	.04509		
Resto	.00911	.87003	.00000	.95491		
Población y superficie proyectadas						
Año	Población			Superficie		
	Valle de México	ZMCM	Resto del Valle	Valle de México	ZMCM	Resto del Valle
Distribución territorial (por cien)						
1980	100.00	87.95	12.05	100.00	17.26	82.74
1985	100.00	88.72	11.28	100.00	20.99	79.01
1990	100.00	89.38	10.62	100.00	24.56	75.44
1995	100.00	89.94	10.06	100.00	27.96	72.04
2000	100.00	90.43	9.57	100.00	31.21	68.79
2005	100.00	90.85	9.15	100.00	34.31	65.69
2010	100.00	91.21	8.79	100.00	37.27	62.73
Valores proyectados						
1980	17 084 195	15 026 266	2 057 929	22 963.92	3 964.35	18 999.57
1985	20 107 949	17 839 418	2 268 531	22 963.92	4 821.13	18 142.79
1990	23 131 964	20 674 431	2 457 533	22 963.92	5 639.27	17 324.65
1995	25 977 847	23 365 078	2 612 769	22 963.92	6 420.52	16 543.40
2000	29 157 576	26 367 152	2 790 424	22 963.92	7 186.54	15 797.38
2005	32 563 123	29 583 457	2 979 666	22 963.92	7 878.91	15 085.01
2010	36 072 038	32 901 636	3 170 400	22 963.92	8 559.17	14 404.75

Fuente: Población del Valle de México: INEGI y Conapo (1985), p. 4.

habilidades de transición, entre diferentes subregiones, de la década 1960-1970 a la de 1970-1980 (48.4 y 56.5% mencionados arriba). Si se adopta esta alternativa, las probabilidades de cambio de estado serían: 0.12474 del resto del Valle hacia la ZMCM y 0.00738 en sentido opuesto en el periodo 1980-1990; 0.06433 y 0.00321 en 1990-2000, respectivamente, y 0.03318 y 0.00140 en el primer decenio del siglo XXI. Esta alternativa corresponde al proceso completo (7).

Los resultados muestran que el 89.5% de los habitantes del Valle de México residirán en la ZMCM en el año 2010, es decir, 32 269 674 personas. Si bien esta cifra es probable, el proceso estocástico adoptado puede cuestionarse, pues la hipótesis de fuerte descenso en las probabilidades de transición parece ser inadecuada, al considerar que la intensidad de la reciente migración en la metrópoli, en parte debida a la inmigración desde el resto del Valle, no parece haber disminuido en la década de los ochenta.

Un segundo escenario, adoptado aquí, consiste en mantener las probabilidades de transición del periodo 1970-1980 constantes para el horizonte completo de proyección, es decir, el proceso (8). Buscando utilizar al máximo las proyecciones demográficas disponibles, que se encuentran publicadas en periodos quinquenales, se ha estimado una matriz de probabilidades de transición  $Q$  para un intervalo de cinco años, como la raíz cuadrada de la estimada para la década de los años setenta:<sup>4</sup>

$$Q = P(70-80)^{1/2}$$

Remplazando  $P$  por  $Q$  en (6) se obtienen las distribuciones relativas para cada periodo quinquenal posterior a 1980. Los resultados y la población proyectada se muestran en el lado izquierdo del cuadro 2.

Respecto de las poblaciones proyectadas para la ZMCM, cabe mencionar dos aspectos: primero, los 20.6 millones de habitantes estimados para 1990 coinciden con la cifra mencionada por diferentes organismos para 1989, y segundo, la evolución hasta el año 2000 es muy similar a la hipótesis recomendada por Ham *et al.* (1983), cuyas proyecciones fueron realizadas por el complejo método multirregional de las componentes demográficas por edad y sexo.

La proyección de la extensión territorial se hizo también a

<sup>4</sup> El algoritmo (Waugh y Abel, 1967) consiste de una simple extensión del conocido Teorema del Binomio de Newton al caso de matrices.

partir de las probabilidades de transición estimadas para los dos decenios del periodo 1960-1980, deducidas de la información respectiva en el cuadro 1. Debido a que, al menos durante el presente siglo, la ZMCM no ha cedido territorio alguno al resto del Valle, se supuso entonces que no hubo ni habrá transferencia de territorio en el sentido mencionado, con lo cual las probabilidades de transición se deducen fácilmente como:

$$\begin{aligned} p_{11} &= 1 \\ p_{12} &= 0 \\ p_{21} &= 1 - c_2(t+h)/c_2(t) \\ p_{22} &= c_2(t+h)/c_2(t) \end{aligned}$$

Los resultados, incluyendo la matriz quinquenal constante de proyección  $Q$  correspondiente a la raíz cuadrada de la decenal 1970-1980, se presentan en el lado derecho del cuadro 2.

La proyección de la extensión territorial de la ZMCM parece adecuada, pues, por un lado, apenas se duplicaría al cabo de los 30 años del horizonte de proyección, cuando aumentó 2.5 veces durante los 20 años previos (1960-1980) y, por otro, la tendencia en la densidad bruta (habitantes/km<sup>2</sup>) es congruente, como se puede ver en la figura 2.

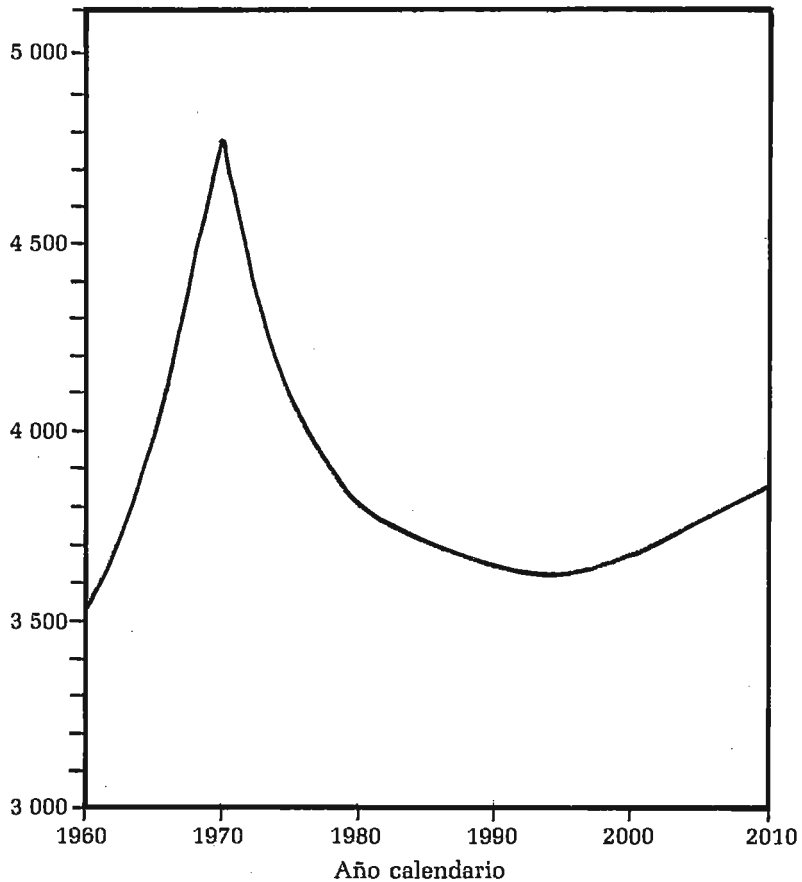
#### *Proyección de la población de los tres contornos de la ZMCM*

La proyección de los habitantes en los tres contornos en que se ha dividido a la ZMCM, de acuerdo con la figura 1, se hizo de la misma manera que para las dos subregiones del Valle de México, utilizando la población proyectada para la metrópoli en el apartado anterior. Conviene mencionar que la delimitación territorial de la *ciudad central* y del *primer contorno* se mantiene fija durante el periodo de proyección, y sólo aumentaría para el *segundo contorno*, aunque no se establecen los municipios del Estado de México que eventualmente se irían incorporando. El resultado de la proyección para los contornos se muestra en el cuadro 3.

En primera instancia se puede observar que la ciudad central transfirió más población hacia los dos contornos restantes que la que recibió de ellos, durante el periodo 1960-1980. Este proceso, más acentuado en los años setenta, propició un decrecimiento en el número de sus habitantes (cuadro 1), tendencia que se mantendría a lo largo del periodo de proyección.

Los dos restantes contornos, en cambio, mantendrían la pauta

**FIGURA 2**  
**Densidades brutas\* para la zona metropolitana de la ciudad de México, 1960-2010**



\* Habitantes por kilómetro cuadrado.

de incremento demográfico, más acentuado en el segundo, de tal suerte que, al término de la primera década del próximo siglo, la distribución territorial de la población en la capital del país sería diametralmente opuesta a la observada cinco decenios antes (1960). Esta evolución muestra un proceso ampliamente conocido: el desplazamiento de la residencia hacia lugares cada vez más lejanos del centro de la metrópoli.

**CUADRO 3**  
**Proyección de la población de los tres contornos de la zona metropolitana de la ciudad de México, 1980-2010**

<i>Probabilidades de transición</i>				
<i>Contorno de destino</i>	<i>Contorno de origen</i>			
	<i>Central</i>	<i>Primero</i>	<i>Segundo</i>	
<i>1960-1970</i>				
Central	.57744	.05430	.00303	
Primero	.34734	.84451	.02104	
Segundo	.07522	.10119	.97593	
<i>1970-1980</i>				
Central	.50930	.03737	.00368	
Primero	.33738	.78248	.03797	
Segundo	.15332	.18014	.95835	
<i>Quinquenales de proyección constantes</i>				
Central	.71008	.02338	.00190	
Primero	.21108	.88069	.02021	
Segundo	.07883	.09593	.97789	
<i>Población media proyectada</i>				
<i>Año</i>	<i>Total</i>	<i>Ciudad central</i>	<i>Primer contorno</i>	<i>Segundo contorno</i>
<i>Distribución territorial (por cien)</i>				
1980	100.00	18.63	52.96	28.41
1985	100.00	14.52	51.14	34.33
1990	100.00	11.57	48.80	39.63
1995	100.00	9.43	46.22	44.34
2000	100.00	7.86	43.59	48.54
2005	100.00	6.69	41.03	52.27
2010	100.00	5.81	38.61	55.58
<i>Población media</i>				
1980	15 026 266	2 799 360	7 957 287	4 269 619
1985	17 839 418	2 590 410	9 123 851	6 125 157
1990	20 674 431	2 392 406	10 089 385	8 192 640
1995	23 365 078	2 204 054	10 799 869	10 361 155
2000	26 367 152	2 073 278	11 494 736	12 799 138
2005	29 583 457	1 980 559	12 139 415	15 463 483
2010	32 901 636	1 912 391	12 702 759	18 286 486

Fuente: cuadros 1 y 2.

### Conclusiones

En este artículo se ha presentado el uso de cadenas de Markov para proyectar la población en áreas geopolíticas menores, como una alternativa a la difícil —seguramente imposible— aplicación de las diferentes variantes del método de componentes demográficas, porque la información requerida es casi inexistente.

El algoritmo consiste en hacer previsiones de la distribución territorial que, aplicada al monto total de habitantes previamente proyectado para un área mayor, arroja la población en cada una de las áreas menores, cualquiera fuera su número; y requiere sólo de la distribución relativa de la población en dos momentos en el tiempo.

El método se aplicó a la zona metropolitana de la ciudad de México, obteniéndose proyecciones razonables tanto del volumen de habitantes como de su extensión territorial. El método se ilustró también con una proyección de los residentes en cada uno de los tres contornos en que se dividió la metrópoli.

El método se puede utilizar también para proyectar la población de otras áreas menores como municipios y localidades, incluso para la dicotomización urbana y rural de una unidad geográfica mayor. La proyección al nivel municipal o de localidad puede ser más adecuada si se aplica el método en varias etapas: iniciando con una agrupación de las unidades menores, sucesivamente se van desagregando hasta obtener los habitantes de cada área menor.

Debido a que el algoritmo sugerido requiere sólo de dos distribuciones relativas en el tiempo, se puede extender a otras variables sociodemográficas: el estado civil, la migración interna entre diferentes regiones de un país, la participación en la actividad económica, la matrícula escolar, etc. Mediante la adecuada incorporación de la mortalidad, adoptando el supuesto de Markov<sup>5</sup> se pueden estimar las probabilidades de transición por edad entre las diferentes categorías adoptadas para la variable sociodemográfica en estudio, e incluso las tasas medias anuales de cambio entre categorías para el periodo en cuestión por edad.<sup>6</sup>

<sup>5</sup> Este supuesto se discute en el apartado 2.1.

<sup>6</sup> Una forma óptima para incorporar el efecto de la mortalidad y para estimar las tasas de cambio puede verse en Nour y Suchindran (1984).

## Bibliografía

- Gómez de León, J. y V. Partida (1986). "Estimación del grado de cobertura de los censos de 1960, 1970 y 1980", *Taller Nacional de Evaluación del Censo General de Población y Vivienda, 1980. Memoria*, volumen 2, México, Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática, pp. 1510-1556.
- Ham, R., V. Partida y F. Saavedra (1983). "Proyecciones de la Zona Metropolitana de la Ciudad de México y de sus municipios y delegaciones, 1980-2000". México, El Colegio de México y Comisión de Aguas del Valle de México, mimeo.
- Hoel, P.G., S.C. Port y C.J. Stone (1972). *Introduction to Stochastic Processes*, Houghton Mifflin Company, Boston, Massachusetts.
- INEGI y Conapo (1985). *Proyecciones de la población de México y de las entidades federativas: 1980-2010*, Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática y Consejo Nacional de Población, México.
- Kemeny, J.G., H. Mirkil, J.L. Snell y G.L. Thompson (1970). *Estructuras matemáticas finitas*, EUDEBA, Buenos Aires.
- Lerda, J.C. (1967). "Aplicación de un proceso en cadena de Markov a la proyección de la mortalidad, por sexo y grupos de edad", *Centro Latinoamericano de Demografía*, Santiago de Chile, mimeo. (C/106), 81 + ii pp.
- Nair, P.S. (1985). "Estimation of Period-Specific Gross Migration Flows from Limited Data: Bi-proportional Adjustment Approach", *Demography*, 22(1), pp. 133-142.
- Nour, E. y C.M. Suchindran (1984). "The Construction of Multi-state Life Tables: Comments of the Article by Willekens et al.", *Population Studies* 38(2), pp. 325-328.
- Negrete, M.E. y H. Salazar (1987). "Dinámica de crecimiento de la población de la Ciudad de México (1960-1980)", *Atlas de la Ciudad de México*, Departamento del Distrito Federal y El Colegio de México, México, pp. 125-128.
- Rogers, A. (1968). *Matrix Analysis of Interregional Population Growth and Distribution*, University of California Press, Berkeley.
- Rogers, A. (1975). *Introduction to Multiregional Mathematical Demography*, John Wiley & Sons, Nueva York.
- SSA (1988). *Encuesta Nacional sobre Fecundidad y Salud 1987. Memoria de la Reunión celebrada el 30 de septiembre de 1987*, Secretaría de Salud, Dirección General de Planificación Familiar, México.
- Waugh, F.V. y M.E. Abel (1967). "On Fraction Power of a Matrix", *Journal of the American Statistical Association (JASA)*, 62 pp. 1018-1021.
- Willekens, F. (1982), "Análisis Multidimensional de Población con Datos Incompletos", *Demografía y Economía*, XIV(3), 51, pp. 328-376.