# PROCESOS ALEATORIOS EN EL ANÁLISIS ECONÓMICO: UN ENFOQUE ELEMENTAL

Tomás Garza H.
*El Colegio de México*

## 1. Introducción

Existe en la actualidad una tendencia cada vez más marcada a utilizar métodos matemáticos en la descripción y análisis de los fenómenos económicos. Sin embargo, dentro de la gran masa de literatura dedicada a estos problemas es todavía raro. encontrar enfoques que incorporen ideas y métodos de la teoría de la probabilidad en sus planteamientos iniciales y en sus desarrollos subsecuentes, hecho desconcertante si se piensa que en los fenómenos reales sujeto de estudio existe un importante elemento de incertidumbre que sólo a costa de gran esfuerzo de simplificación puede ignorarse.

Apenas muy recientemente empieza a notarse un esfuerzo claro en la dirección del análisis probabilístico de los fenómenos económicos. Pueden mencionarse las obras de Steindl [1] y de Sengupta [2] entre las contribuciones más significativas a este esfuerzo y que sin duda tendrán gran repercusión como precursoras del nuevo enfoque a que nos referimos. En este artículo se tratará de exponer, a nivel elemental, algunos de los puntos salientes de la aplicación de los procesos aleatorios, y al mismo tiempo se intentará poner de relieve las debilidades del enfoque cuantitativo que ya podemos denominar clásico.

Los métodos matemáticos más frecuentemente utilizados en la economía pueden clasificarse, *grosso modo,* en dos grupos: los métodos econométricos y los métodos de la llamada economía matemática. De manera sucinta pueden caracterizarse estas dos grandes divisiones según que el objetivo sea construir procedimientos estadísticos para la estimación de parámetros en ecuaciones entre variables económicas, o tratar de establecer entre ellas relaciones cuantitativas, usando métodos del análisis matemático (y generalmente un elevado nivel de abstracción y formalismo que oscurece las ligas entre la teoría y la realidad que se trata de estudiar).

La observación crítica de los dos enfoques mencionados lleva a la conclusión de que, en el caso de la economía matemática, simplemente no se considera el elemento de incertidumbre; en todo caso, se obtienen ciertas relaciones entre cantidades, que pueden suponerse aleatorias o no, pero que esencialmente ignoran esta posibilidad. En

[1] J. Steindl, *Random Processes and the Growth of Firms,* Londres, Griffin, 1965.
[2] S. Sankar Sengupta, *Operations Research in Sellers Competition,* Nueva York, John Wiley, 1967.

el caso de la econometría, el punto de partida es una o varias ecuaciones lineales, afectadas de una perturbación aleatoria, y que en el fondo tienen una estructura claramente determinista; en otras palabras, se relega el elemento de incertidumbre a un lugar muy secundario en el problema.

Ahora bien, la objeción más fuerte que puede formularse a los métodos clásicos de la economía matemática y de la econometría surge de la relativa pobreza, en términos prácticos, de los resultados obtenidos. A fin de cuentas, el fenómeno bajo estudio está realizándose constantemente, y su trascendencia no podría ser mayor; sin embargo, a pesar de la voluminosa producción científica en esos dos renglones, y del gran interés que sin duda existe en todos los niveles de la actividad económica por disponer de herramientas de análisis útiles en la toma de decisiones, sigue observándose en general un divorcio entre los resultados del análisis cuantitativo y lo que sucede *en la realidad*. La sola consideración anterior bastaría, si se procede con espíritu científico, para sugerir una revisión de las bases, y aun de la metodología misma; es por ello desconcertante notar que el casi invariable fracaso de los modelos cuantitativos clásicos (en su prueba definitiva: la realidad observada) no ha producido todavía una revolución general en el enfoque matemático de los problemas económicos.

Analizado formalmente, es indudable que el trabajo contemporáneo, tanto en la economía matemática como en la econometría, tiene solidez y profundidad en sus planteamientos y desarrollos teóricos, de manera que su falta de validez real no puede atribuirse a deficiencias en este sentido, sino más bien a una forma incorrecta de abstraer los elementos esenciales del fenómeno real y en consecuencia a una interpretación deficiente de las interrelaciones y reglas de comportamiento que se les asigna. Así, por ejemplo, la simplificación en las hipótesis para construir modelos, que lleva a proponer ecuaciones de carácter relativamente trivial para describir las relaciones entre fenómenos sumamente complejos, deja con frecuencia fuera del análisis bien sea un número de factores que quizá individualmente no sean importantes, pero cuya influencia conjunta pueda serlo, o bien ciertos elementos de carácter aleatorio que al ser ignorados producen resultados de carácter determinista que son incluso a primera vista inverosímiles.

Ahora bien, una consecuencia de las deficiencias del enfoque clásico es el desprestigio que empieza a amenazar el uso de los métodos cuantitativos, no sólo en la economía, sino en varias otras disciplinas sociales en que se ha observado una situación semejante. Se dice que siendo el objeto de las ciencias sociales un ser tan incierto como el hombre, no es posible reducir a fórmulas matemáticas ningún análisis respecto de él, así que de hecho se considera como juego especulativo lo que en la actualidad se hace mediante métodos cuantitativos, ya sea en la economía, la sociología u otras ramas afines. Por desgracia, la incapacidad de los resultados obtenidos para ajustarse a la realidad observada viene a apoyar esta actitud negativa, que en principio podría refutarse con el argumento de que las moléculas de gas en un recipiente, el movimiento de las olas en el mar, o las partículas elementales estudiadas en la física moderna son ejemplos todos ellos de entes individualmente tanto o más inciertos que el hombre en la sociedad, y sin embargo difícilmente puede negarse el éxito espectacular que las teorías de la termodinámica, la física nuclear o la dinámica de los océanos han logrado en las últimas décadas en sus aplicaciones. Las razones de esto pueden ser que, primero, se ha considerado adecuadamente las hipótesis de abstracción de los fenómenos; segundo, las matemáticas utilizadas han sido las apropiadas, y, tercero, se ha mantenido constantemente una actitud de crítica a la teoría en cuanto a su capacidad para predecir adecuadamente la realidad, y no se ha vacilado, en las ciencias naturales, en desechar una teoría cuando la realidad no se comporta de acuerdo con ella.

Existen, a no dudarlo, planteamientos que en cierta manera incorporan al análisis la presencia de elementos aleatorios, como en el caso de la econometría, por ejemplo. Aun así, no es difícil ver que sigue tratándose de modelos deterministas, y la introducción de perturbaciones aleatorias en las ecuaciones lineales sólo complica notablemente el desarrollo posterior de la teoría, sin que por ello pueda decirse que se ha adelantado en la dirección de una mejor representación de la realidad. Podría ilustrarse esta situación mediante la noción de eventos recurrentes en la teoría de la probabilidad: consideremos una sucesión de puntos colocados sobre una recta, de tal manera que las longitudes de los intervalos entre puntos consecutivos sean escogidas al azar de alguna manera prescrita. La posición de los puntos sobre la recta define entonces lo que se llama una sucesión de eventos recurrentes, y existe un gran número de aplicaciones de este tipo de esquema probabilístico. En ocasiones, sin embargo, se ha tratado de "simplificar" este modelo (que ciertamente requiere un buen nivel de madurez matemática) mediante la idea de colocar primero sobre la recta una sucesión de puntos en posiciones prefijadas, y modificar entonces cada una de ellas mediante una perturbación aleatoria, de tal manera que a fin de cuentas resulta, en efecto, que las longitudes de los intervalos entre puntos consecutivos son aleatorias, y esta superficial analogía con el modelo anterior es frecuente causa de confusión en su interpretación y posterior intento de aplicación. Notemos que en el primer caso (el de la sucesión de eventos recurrentes) puede verse que la posición de, digamos, el $n$-ésimo punto depende de la del ($n$-1)-ésimo en cuanto que debe estar a su derecha; sin embargo, el segundo modelo, el de los puntos fijos con perturbaciones aleatorias, hace caso omiso de esta relación de orden y puede ocasionalmente generar puntos que queden a la izquierda de su predecesor natural, lo que conduciría a resultados absurdos. Una situación típica que se presenta en la realidad son los fenómenos de espera; aquí se considera que hay una sucesión, por ejemplo, de personas que llegan al azar a un mostrador a solicitar un servicio. El modelo más común para describir esta situación consiste en suponer que al momento de una llegada se genera, por algún mecanismo aleatorio, un cierto intervalo de tiempo que es el que transcurrirá hasta la siguiente llegada; si esta selección se hace independientemente de las anteriores en cada caso, se dice que se tiene un modelo de llegadas "recurrentes" (pues corresponde exactamente a la idea de los eventos recurrentes expuesta arriba). Sin embargo, puede construirse un modelo inadecuado suponiendo que en realidad las llegadas deben ocurrir a intervalos iguales, pero que por alguna razón hay una perturbación que produce un adelanto o un atraso sobre el instante esperado de llegada. Lejos de simplificar el análisis, este modelo generalmente complica el tratamiento matemático, y, lo que es peor, al no haber considerado adecuadamente las condiciones reales del problema, produce resultados cuya validez práctica suele dejar mucho que desear.

El ejemplo anterior ilustra la diferencia entre dos enfoques con elementos aleatorios, uno de los cuales hace un uso, si no correcto, por lo menos bastante aproximado de las condiciones reales, mientras el otro plantea en esencia una situación determinista que, a pesar de contener una perturbación aleatoria, no refleja adecuadamente la realidad observada. Notemos que en ambos casos se puede llevar a cabo un análisis matemático muy elaborado y obtener resultados formalmente correctos; pero desde un punto de vista científico, es muy importante, además, que al haberse tomado las hipótesis correctas, los resultados reflejen la realidad y la describan satisfactoriamente.

## 2. Conceptos básicos de la probabilidad

Una de las características peculiares de la teoría matemática de la probabilidad es la dificultad para lograr un enfoque a un nivel intermedio de complejidad de los problemas que estudia. Así, o se llega a una comprensión superficial de las ideas con muy poca perspectiva de seguir un análisis serio, o bien se requiere adentrarse profundamente en sus fundamentos, métodos y problemas para tener acceso a la riqueza de material disponible para la investigación aplicada, lo que presupone una sólida preparación en el análisis matemático, generalmente sólo asequible a los profesionales de la especialidad. Esta característica ha tenido como efecto el dejar fuera de la teoría económica el uso de métodos probabilísticos hasta fechas relativamente recientes. No es así con otras herramientas matemáticas, como el álgebra lineal o el cálculo diferencial e integral, que como es bien sabido son usados por los economistas con gran soltura, sin necesidad de llegar a grandes profundidades, y puede desarrollarse sin mucha dificultad buena parte de la teoría contando con sólo algunos resultados matemáticos de rutina. Intentaremos aquí hacer una exposición de las ideas básicas de la teoría, a fin de por lo menos dejar establecida una terminología que nos permita comprender algunos de los resultados a que nos referiremos posteriormente.

Podemos decir que la teoría de la probabilidad se ocupa de establecer leyes que describan el comportamiento de fenómenos aleatorios (esto es, fenómenos cuya realización arroja resultados que no pueden determinarse antes de la misma). Así, en tanto que las leyes llamadas deterministas establecen que ciertos fenómenos, al realizarse, producen uno o varios resultados *a priori* conocidos, las leyes probabilísticas cuantifican la verificación de esos posibles resultados. Una ilustración de lo anterior sería, por ejemplo, la afirmación de que al arrojar una moneda al aire, ésta caerá al suelo. Ésta es una ley determinista, e incluso podría irse más lejos y predecirse la velocidad con que llegará al suelo si se conocen las condiciones iniciales. Una ley probabilística relativa a este mismo ejemplo afirmaría que al caer la moneda al suelo, una de las caras quedará hacia arriba *con una probabilidad de ½*. Es decir, no se está afirmando que con certeza esa cara caerá hacia arriba, como la ley determinista afirma que con certeza la moneda caerá al suelo, abstracción hecha de accidentes imprevisibles, sino que se añade que sucederá eso, sólo que, como si dijéramos, no siempre, y esto es lo que la probabilidad está de hecho midiendo. La interpretación de esta medición es en el sentido de que una repetición del experimento varias veces producirá el evento aleatorio considerado "aproximadamente la mitad de las veces".

Un concepto de importancia central en el desarrollo de la teoría es el de *variable aleatoria*, punto de partida del análisis de fenómenos reales mediante el enfoque probabilístico. Brevemente, si la realización de un experimento aleatorio arroja un resultado *numérico*, entonces este resultado, *previo a la realización del experimento*, se denomina variable aleatoria asociada con ese experimento. La medición probabilística de esta variable la hacemos asignando de alguna manera probabilidades a cada uno de los posibles valores numéricos que aquella puede tomar,[3] y este conjunto de probabilidades, correspondientes a cada posible valor, constituye la llamada *distribución de probabilidad de la variable aleatoria*. Ahora bien, en muchas ocasiones es posible expresar una variable aleatoria correspondiente a un fenómeno real de interés en términos de otras más simples y cuyas distribuciones de probabilidad se conocen, y entonces el problema consiste en encontrar la distribución de la variable de interés a partir de estas últimas. Este es, de hecho, uno de los problemas centrales de la teoría de la probabilidad.

En general, manejaremos la distribución de probabilidad de una variable aleatoria a través de la llamada función de distribución, que se define de la siguiente manera: si denotamos con el símbolo $X$ la variable, entonces su función de distribución, $F(t)$, donde $t$ es cualquier número real, se define como $F(t) = \text{prob}\,(X \leq t)$, esto es, la probabilidad de que $X$ tome algún valor no mayor que $t$ al realizarse el experimento.

Las reglas elementales de la teoría pueden resumirse en la forma siguiente: si dos eventos son mutuamente exclusivos, entonces la probabilidad de que ocurra alguno de los dos es la suma de sus probabilidades respectivas, en tanto que si dos eventos son independientes (esto es, que la verificación de uno de ellos no afecte la posible verificación del otro), entonces la probabilidad de que ambos sucedan simultáneamente es igual al producto de sus probabilidades.

Un proceso aleatorio (o proceso estocástico) es una sucesión de variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots$, y la distribución del proceso es la función de distribución de $X_n$, el $n$-ésimo elemento de la sucesión, para cada valor de $n$. Una gran variedad de fenómenos naturales se presta

[3] Aquí la descripción no pretende ser matemáticamente rigurosa ni completa, y referimos al lector escrupuloso a cualquier tratado sobre la materia.

a una representación en términos de un proceso aleatorio, y puede obtenerse a partir de un análisis adecuado mucha información acerca del desarrollo del proceso en el tiempo. Interesa, en particular, conocer el comportamiento del fenómeno después de transcurrido un tiempo muy grande desde el momento de su iniciación, cuando ya el efecto de las condiciones iniciales ha desaparecido. Cuando sucede que es posible encontrar una distribución común a todos los elementos del proceso, después de transcurrido un tiempo largo, entonces se dice que el proceso está en equilibrio, y generalmente la distribución en equilibrio reviste mucho interés para las aplicaciones.

Trataremos en lo que sigue de utilizar las ideas apuntadas para estudiar algunos problemas de la teoría económica bajo el enfoque probabilístico. Los resultados que se obtendrán, aunque relativamente simples, bastarán, se espera, para indicar la fuerza del enfoque y las posibilidades de su aplicación sistemática al estudio de los fenómenos económicos.

## 3. Un problema de la economía de la empresa

Como ya se ha mencionado, una fuente de error en la construcción de los modelos económicos ha sido la sobresimplificación de las hipótesis acerca de la forma en que funciona la realidad. Esto ha sido, en general, necesario para mantener las matemáticas a un nivel manejable de complejidad, pero, según se hizo ver, la consecuencia es que la confrontación con la realidad deja mucho que desear. Sin embargo, es posible introducir hipótesis más finas en el planteamiento de un problema sin que necesariamente se complique la construcción del modelo. Si en lugar de tratar de escribir cada suposición en forma de una ecuación, se mantienen solamente como normas de comportamiento en el trasfondo del problema, puede llegarse a resultados que se prestan a tratamiento matemático de nivel razonable. Veremos de qué manera se logra esto mediante el análisis de un problema que surge en una situación donde se tienen varias empresas que producen un artículo esencialmente igual y que compiten entre ellas por venderlo, en un mercado en que los consumidores tienen grados de preferencia por la marca (esto es, por el fabricante particular).

En el análisis seguiremos básicamente el tratamiento expuesto por Sengupta [4] sobre competencia oligopólica. La descripción del problema puede hacerse como sigue: cada una de las empresas involucradas debe tomar una decisión acerca del precio que debe asignarse al producto así como de los costos de venta en que pueden incurrir, todo esto relativo a cierto período de planeación fijo.

Supongamos que el mercado está funcionando de manera que los compradores recurren directamente a los fabricantes para información sobre precios, y que no necesariamente acuden a todos ellos, en virtud de la preferencia por la marca. Cada comprador tiene un precio máximo que está dispuesto a pagar, digamos $P^*$, y efectúa su compra de acuerdo con la comparación entre los precios investigados. Supondremos también que no hay comunicación respecto de los precios ni

[4] *Op. cit.*

entre fabricantes ni entre compradores; además, el precio que fija cada empresa por el producto es el mismo para cada comprador, sin importar la cantidad que éste esté dispuesto a adquirir.

Con las especificaciones introducidas en el párrafo anterior trataremos de obtener la distribución de probabilidad del número de artículos vendidos por un productor individual. Si esta distribución aparece en términos de ciertos parámetros que pueden ser controlados por la empresa, entonces se puede obtener, en un proceso posterior, valores para ellos de manera de, por ejemplo, hacer máxima la cantidad de artículos vendidos en el período de planeación bajo estudio.

Denotemos con el símbolo $p$ el precio que propone la empresa para el artículo, y con $q(j)$ el precio máximo que el comprador número $j$ está dispuesto a pagar por el producto de esa empresa en particular (y que no necesariamente es igual para otras empresas). Ese mismo cliente, que hemos llamado el $j$-ésimo, investiga los precios del producto en otras $r$ empresas, siendo este número desconocido para la que nos interesa. Construiremos entonces el vector

$$\vec{q}(j) = (q_1[j], \ldots, q_r[j])$$

cuyos elementos son los precios máximos que ese comprador potencial está dispuesto a pagar en cada una de las $r$ empresas que ha investigado, y de la misma manera el vector

$$\vec{p} = (p_1, \ldots, p_r)$$

correspondiente a los precios cotizados por cada una de ellas a ese comprador, y que son, por hipótesis, constantes para todos los compradores.

Ahora bien, según las hipótesis consideradas anteriormente, los elementos de $p$ y de $q(j)$ son, desde el punto de vista de nuestra empresa, variables aleatorias, de manera que, si se considera que el comprador decidirá de acuerdo con el precio más bajo, y siempre que éste no exceda su precio máximo de compra, entonces la probabilidad de que se realice una venta a un comprador que llega al azar depende de la probabilidad de los dos eventos aleatorios

$$A_1: p < \min(p_1, \ldots, p_r)$$
$$A_2: p \leq q(j)$$

Estos dos eventos son independientes, puesto que las hipótesis establecidas al principio de esta sección establecían que el productor ignora los precios de sus competidores, y no sabe cuáles de ellos han sido investigados por el cliente en cuestión. Así pues, la probabilidad de que en un contacto al azar se realice una venta es igual a

$$\mu(p) = \text{prob}(A_1)\,\text{prob}(A_2)$$

y claramente ésta depende de $p$, o sea el precio que nuestra empresa ha decidido asignar al producto.

Aun cuando las cantidades que definen a $\mu(p)$ no son conocidas, es posible obtener estimaciones estadísticas de su valor; después tocaremos brevemente este punto.

De aquí en adelante es relativamente fácil proseguir con el análisis; nótese que el cúmulo de hipótesis propuestas no ha producido hasta el momento más que una cantidad $\mu(p)$, y no se ha llegado aún a establecer otro tipo de relaciones entre las variables que están en juego en el problema. En virtud de que cada cliente acepta o rechaza la cotización ofrecida, es posible concluir que, de $V$ clientes que se hayan acercado a investigar el precio, la probabilidad de que exactamente $S$ de ellos lo acepten y compren el producto al precio $p$, es igual a

$$\text{prob}\,(S; V, p) = \binom{V}{S} [\mu p]^{S} (1 - \mu p)^{V-S}$$

un resultado familiar en la teoría de la probabilidad, conocido con el nombre de *distribución binomial*, y cuya deducción se encuentra en cualquier texto elemental sobre la materia.

Ahora bien, notamos que en la expresión anterior la cantidad $V$ es a su vez una variable aleatoria, y puede hacerse entonces alguna consideración sobre su comportamiento probabilístico con base en las hipótesis que estamos usando. Un modelo simple para $V$, es decir, el número de clientes que llegan a solicitar cotización, consiste en suponer que éstos llegan al azar, y en forma independiente unos de otros. Bajo ciertas condiciones sobre la magnitud de la tasa de llegadas (digamos $\lambda$ por unidad de tiempo), este fenómeno puede describirse mediante el llamado *proceso de Poisson*, también un resultado bien conocido en la probabilidad matemática. Resulta, entonces, que

$$\text{prob}\,(V = n) = \exp\,(-\lambda)\,\lambda^{n}/n!$$

y el parámetro $\lambda$ dependerá principalmente de los esfuerzos de venta de las empresas dedicadas a la producción del artículo. Una medida que puede servir para este propósito es $c$, la cantidad gastada, digamos, por unidad de venta, en los esfuerzos promocionales. En tal virtud, podemos escribir $\lambda$ como función de $c$, esto es, $\lambda = \lambda(c)$, y de nuevo, aunque no es ésta una cantidad conocida, se presta al análisis estadístico para su determinación. Así pues, tenemos finalmente que

$$\text{prob (ventas} = S\text{; precio del artículo} = p\text{; costo unitario de venta} = c)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \text{prob}\,(S; V, p)\;\text{prob}\,(V = n; c)$$

$$= \sum \binom{n}{S} [\mu(p)]^{s} [1 - \mu(p)]^{n-s} e^{-\lambda(c)} [\lambda(c)]^{n}/n!$$

$$= e^{-\lambda(c)\,\mu(p)} [\lambda(c)\,\mu(p)]^{s}/s!,\; s = 0, 1, 2, \ldots,$$

según puede comprobarse con simples manipulaciones algebraicas.

Consideremos ahora el resultado obtenido en el último párrafo. Vemos que partiendo de un conjunto de hipótesis ciertamente no demasiado restrictivas ni artificiales sobre el comportamiento del mercado, llegamos a establecer una distribución de probabilidad para el número de artículos vendidos bajo una política de precios y esfuerzos promocionales determinada. Quedan, es cierto, algunas cosas por determinar, como las funciones $\lambda(c)$ y $\mu(p)$, pero éstas se sujetan fácilmente a un análisis estadístico, y lo importante es que se obtuvo una ecuación probabilística que describe de manera muy concisa las interrelaciones entre los factores que se consideran en juego. Notemos, además, que el resultado obtenido coincide con lo que *a priori* se esperaría del comportamiento del fenómeno, a saber, que el número de unidades vendidas por nuestra empresa durante el período estudiado sigue una distribución de Poisson (véase, por ejemplo, el texto de Feller)[5] y está además agregando la información de que el parámetro de esa distribución depende del precio fijado y del costo a través del producto $\lambda(c)\mu(p)$.

Otra ventaja importante del enfoque probabilístico que estamos estudiando es su gran flexibilidad respecto de la incorporación de nuevos supuestos en el modelo o de la modificación de los mismos. Supongamos que se desea refinar el juego de hipótesis usado en la primera parte de esta sección modificando una hipótesis relativa al comportamiento del comprador, en el sentido de que consideraremos que la utilidad que éste asigna al producto decrece durante un cierto período posterior a la realización de una venta (esta hipótesis es razonable cuando se trata, por ejemplo, de equipo industrial duradero). En este caso podemos suponer que una venta del producto en un intervalo de tiempo $(t - \Delta t, t)$ tiene el efecto de disminuir la probabilidad de que se efectúe otra venta en el intervalo $(t, t + \Delta t)$.

Definamos entonces la tasa de demanda del artículo en el instante $t$ como el número de unidades demandadas durante el intervalo $(t\text{-}T, t)$, donde $T$ es un número fijo. De acuerdo con la nueva hipótesis, es evidente que la demanda en $(t\text{-}T, t)$ depende de la demanda $X$ en el período $(t\text{-}T - \Delta t, t\text{-}T)$. Sin demasiadas limitaciones podemos suponer que si en un intervalo de tiempo ha habido una demanda $X$, entonces en un intervalo suficientemente pequeño que suceda al anterior, la demanda registrada será $X + 1$ o $X - 1$, en caso de que haya cambio, y la probabilidad de estas transiciones depende sólo de $t$, $\Delta t$ y $X$.

Con la descripción anterior puede utilizarse cualquiera de las técnicas usuales de la teoría de los procesos aleatorios y establecer una ecuación diferencial para $P_X(t)$, la probabilidad de que al tiempo $t$ la demanda registrada sea igual a $X$. Designando con $\alpha$ y $\beta$ las intensidades del aumento o disminución de la utilidad que el comprador asigna al artículo inmediatamente después de que se realiza una venta, respectivamente, tenemos, luego de establecer las probabilidades instantáneas de transición en términos de $\alpha$ y $\beta$, que la ecuación diferencial

$$\frac{d P_X{}^{(t)}}{dt} = \alpha(t)(m\text{-}X + 1) P_{x-1}{}^{(t)} - [\alpha(t)(m\text{-}X) + \beta(t) X] P_x{}^{(t)} + \beta(t)(X + 1) P_{x+1}{}^{(t)}, X = 1, 2, \ldots, m\text{-}1,$$

se satisface para la función $P_x(t)$, donde $m$ es la demanda total del artículo en el intervalo de tiempo $(t\text{-}T, t)$.

La significación del hecho de haber podido establecer una ecuación diferencial para $P_X(t)$ es muy grande, y deliberadamente estamos evi-

[5] W. Feller, *Introduction to Probability Theory*, Vol. 1, Nueva York, John Wiley, 1957, p. 400.

tando la masa de detalles algebraicos que oscurecerían los puntos salientes de nuestro argumento; remitimos al lector al libro de Sengupta para la deducción completa de la ecuación de referencia. En primer lugar, debe notarse que ahora estamos introduciendo el elemento tiempo en el problema, lo que es un avance notable respecto del modelo anterior, que consideraba un período fijo. En segundo, vemos que una modificación aparentemente fuerte en algunas de las hipótesis pudo ser manejada en forma apropiada por la teoría, sin afectar el enfoque general del problema.

Por otra parte, la ventaja de las ecuaciones diferenciales para describir un fenómeno es que generalmente pueden resolverse con métodos más o menos difíciles, pero casi siempre disponibles; puede, además, notarse que no se está dejando fuera elementos esenciales del problema, siempre y cuando exista la forma de incorporarlos al modelo. Esto es, no trata tanto de no complicar el planteamiento del modelo como de poder hacer los supuestos de manera que correspondan a la realidad, y esto quizá encierra mayor dificultad en sí que las matemáticas que se requieran para su tratamiento posterior.

## 4. Un problema macroeconómico

En la sección anterior hemos ilustrado las posibilidades de la aplicación de métodos probabilísticos a una situación en la economía de la empresa. Existen fenómenos en mayor escala que pueden sujetarse al mismo tipo de análisis con resultados muy satisfactorios en cuanto a su capacidad para describir la realidad. Steindl,[6] en su excelente trabajo sobre la ley de Pareto, hace referencia a un sinnúmero de situaciones que se prestan a un análisis apropiado, y comprueba empíricamente la bondad de los resultados teóricos. La ley de Pareto es una expresión surgida de la observación persistente de una cierta forma de comportamiento de una variedad de fenómenos; por ejemplo, la distribución de frecuencias del número de empresas con respecto a sus ventas, al número de sus trabajadores, o a sus activos; del número de ciudades con respecto a su población, o del número de personas con respecto a su riqueza personal, son todos casos en que frecuentemente se observa una forma peculiar en la representación gráfica del fenómeno. Esta forma particular recibe el nombre de ley de Pareto, y es uno de los pocos ejemplos de una ley empírica en el campo de la economía. Resulta difícil aceptar la existencia de una ley empírica de carácter tan diverso, y sin embargo no es fácil construir un modelo determinista de la realidad que pueda llevar como consecuencia a esa ley. Es curioso encontrar en ocasiones una actitud escéptica sobre los méritos de esa ley, como si hubiese sido el producto de alguna teoría general que forzase a la realidad a comportarse de determinada manera, y no simplemente el resultado natural de la interacción de fuerzas elementales completamente naturales, y de magnitudes y direcciones aleatorias.

Trataremos ahora de construir un modelo que, a partir de hipótesis bien sencillas, produzca como consecuencia la expresión de dicha

[6] *Op. cit.*

ley. Una exposición completa y bien argumentada puede seguirse en el tratado de Steindl, y aquí nos concretaremos a ver sólo los aspectos generales del enfoque apropiado del problema, debido a que las matemáticas se pueden hacer muy laboriosas de seguir y a que por ahora interesa más bien destacar los puntos salientes del modelo y sus consecuencias.

En términos generales, la idea consiste en suponer que la empresa puede verse como el conjunto de sus clientes, y que esto puede servir, en cierto modo, como una medida del tamaño de la empresa. Ciertamente esto no se cumple en muchos casos, pero pueden mencionarse algunos ramos, tales como cierto tipo de comercio en alimentos, por ejemplo, en que la empresa crece a medida que tiene más clientes.[7] El conjunto de clientes consiste, para una empresa dada, en aquellos que han comprado alguna vez y que pueden volver a hacerlo; este conjunto aumenta al hacerse de un nuevo cliente, y disminuye cuando alguno deja de serlo, por cualquier causa (muerte o simple cambio de preferencia). Un proceso aleatorio muy conocido es el llamado de "nacimiento y muerte" y describe el comportamiento probabilístico en el tiempo de una población sujeta a aumento o disminución en su número, de acuerdo con tasas de natalidad y mortalidad dadas, y puede aplicarse a la situación que nos ocupa en este caso para obtener, de una empresa dada, las probabilidades $P_n(t)$ de que en el instante $t$ la población de clientes sea de tamaño $n$. Es aquí importante aclarar que, bajo las hipótesis consideradas, en un momento dado de observación sólo las empresas con igual "edad" (esto es, tiempo de funcionamiento) tendrán igual distribución $P_n(t)$, suponiendo naturalmente que se trata de empresas homogéneas en cuanto a los factores que estimulan o afectan de otra manera el crecimiento del número de clientes. Parece ésta una fuerte restricción al modelo, ya que por ahora no se considerará la posible variación de estos factores de una empresa a otra (y que se debe a diferentes formas de organización, fuerza financiera, eficiencia administrativa, etc.), pero a pesar de ello se obtendrá un resultado que coincide con la realidad observada, lo que constituye una razón poderosa para no preocuparse en este momento por esas restricciones.

En forma muy concisa, el procedimiento que se sigue consiste en *a)* obtener, para empresas de la misma edad, la distribución $P_n(t)$, y de aquí la llamada "cola de la distribución", esto es, la función $K_n(t) = \sum_{j=n}^{\infty} P_j(t)$; *b)* determinar cuál es, en el instante $t$, la distribución por edades de las empresas, suponiendo que existe un estado de equilibrio estadístico (concepto análogo al de *estabilidad* usado por los demógrafos) en la distribución por edades; la distribución en equilibrio es una consecuencia de las mismas hipótesis del proceso de nacimiento y muerte, y *c)* formar una muestra de empresas, de acuerdo con las proporciones que, al instante $t$, hay de cada edad, e investigar en esa muestra qué forma tiene la cola de la distribución con respecto al número de clientes.

Los tres pasos citados arriba tienen un grado moderado de difi-

[7] Steindl, *ibid.*, cap. 2.

cultad, aunque no requieren más que un conocimiento básico de los conceptos probabilísticos. El hecho fundamental es que como resultado de esa secuencia de operaciones obtenemos para la cola de la distribución del número de empresas respecto del número de clientes una expresión del tipo $G(n) = Kn^{-w}$ que es justamente la conocida como ley de Pareto.

Resulta así sumamente halagador comprobar que, por una parte, es posible llegar, partiendo de hipótesis nada restrictivas, a un resultado tan simple, y que, por otra, las observaciones empíricas coincidan de manera tan notable con el resultado teórico; esto constituye una ratificación del papel importante que los métodos de la probabilidad están llamados a desempeñar dentro del análisis económico, y aun cuando queda por delante gran cantidad de trabajo de refinación, tanto de hipótesis y técnicas, como de métodos de observación y medición de los fenómenos, se sugiere por lo menos un enfoque que en principio puede resultar satisfactorio en esa dirección.