La contemporaneidad del *Ensayo* o por qué no es conveniente olvidar a Malthus

José Carlos Ramírez*
José B. Morelos**
Leovardo Mata Mata***

El documento presenta un modelo basado en una ecuación diferencial Bernoulli con rezagos para formalizar la dinámica estable y con oscilaciones del principio de población de Malthus. El objetivo es emplear nuevas herramientas matemáticas y conceptuales que permitan hacer útiles los argumentos del Ensayo *en el estudio de problemas demográficos actuales. La simulación aquí desarrollada para el caso de México ejemplifica una de las tantas formas en que se puede rehabilitar el principio para interpretar mejor las fases de la transición demográfica o las condiciones de estabilidad y convergencia de una población de ingreso medio en el largo plazo. Las principales conclusiones del modelo cuestionan la pérdida que ha significado para la demografía asimilarse a los modelos de crecimiento económico tradicionales sin incorporar el estudio de las oscilaciones.*

Palabras clave: principio de Malthus, ecuación diferencial con rezagos, estabilidad con oscilaciones, convergencia de trayectorias logísticas, proyecciones de población.
Fecha de recepción: 25 de enero de 2010.
Fecha de aceptación: 21 de junio de 2010.

The Contemporary Nature of the *Essay* or Why One Should Not Forget Malthus

The document presents a model based on Bernoulli's lag differential equation to formalize the stable dynamics, with oscillations from Malthus' population principle. The aim is to use new mathematical and conceptual tools that will make the Essay's arguments useful in the study of present-day demographic problems. The simulation undertaken here for the case of Mexico exemplifies one of the many ways the principle can be rehabilitated for a better interpretation of the phases of demographic transition or the conditions of stability and convergence of a middle-income population in the long term. The main

* Profesor investigador del CADEN, Universidad Anáhuac-México-Norte y profesor afiliado al Departamento de Economía del Centro de Investigación y Docencia Económicas (CIDE). Correo electrónico: jose.ramirez@anahuac.mx.
** Profesor investigador del Centro de Estudios Demográficos, Urbanos y Ambientales de El Colegio de México. Correo electrónico: jmorelos@colmex.mx.
*** Doctor en Ciencias Financieras, ITESM-CCM. Correo electrónico: leomata2@hotmail.com.

conclusions of the model question the loss undergone by demography as a result of being assimilated into traditional economic growth models without incorporating the study of oscillations.

Key words: Malthus' principle, lag differential equation, stability with oscillations, convergence of logistic trajectories, population projections.

Introducción

No hay duda de que es realmente difícil encontrar un personaje tan polémico como Malthus en el curso de varias disciplinas. Sus críticos y defensores en economía, demografía, biología y ecología se cuentan por miles y sus ideas desatan hoy día las mismas tempestades que solían provocar en 1798, cuando apareció la primera edición del *Ensayo* en Inglaterra.[1]

La contemporaneidad de sus argumentos no es, sin embargo, un asunto de simpatías. Es consecuencia de la misma naturaleza del problema tratado en el *Ensayo* y que afecta con mayor o menor gradación a todo tipo de sociedad en cualquier época: la relación conflictiva entre el crecimiento de los medios de subsistencia y el de la población. Las ya añejas diferencias sobre la forma en que se establece esa relación y las mediaciones que explican la causalidad entre ambas variables no restan importancia ni actualidad al *principio*.[2] De hecho hay tres razones para considerar vigente el análisis demográfico basado en el *principio*.

La primera es que los equilibrios con salarios bajos y altos propuestos por los estudios modernos sobre el *principio* pueden ser adaptados a la experiencia demográfica de algunos países en desarrollo en los que se observan alternativamente relaciones positivas y negativas entre el crecimiento de la población y el del ingreso.[3] Sobre este punto al-

[1] El título completo del libro en su primera edición inglesa es *An Essay on the Principle of Population, as it Affects the Future of Society with Special Remarks on the Speculations of Mr. Godwin, and other Writers*. Nosotros adoptaremos la práctica habitual de referirlo simplemente como *Ensayo*.

[2] Malthus enuncia el *principio* como la tendencia de toda *vida animada* a crecer más allá de sus disponibilidades alimenticias. Para tal efecto formula tres supuestos que son presentados como leyes fijas de nuestra naturaleza: *1)* Los alimentos son indispensables para la existencia del hombre; *2)* la pasión entre los sexos es inevitable; y *3)* las potencialidades de crecimiento de la población son infinitamente superiores a las de los alimentos (Dooley, 1988).

[3] Para más detalles véase el apartado "Una aplicación al caso de Malthus".

gunos autores (como Blanchet, 1990) sostienen que los modelos maltusianos son capaces de predecir el mismo comportamiento seguido por países de ingreso medio durante varias fases de su transición demográfica, que los modelos de crecimiento tecnológico endógenos.[4] La segunda razón es que algunos supuestos implícitos en la dinámica del *principio*, como la existencia de rendimientos decrecientes en las funciones de producción, son ideales para observar los efectos de la presión demográfica sobre los recursos no renovables u otros medios de subsistencia agotables.[5] Las consecuencias medioambientales resultantes de la conversión de suelos boscosos a suelos arables o el ensalitramiento de los mantos acuíferos por la rotación de cultivos intensivos en agroquímicos, tan comunes en todas partes del mundo, son problemas que pueden abordarse adecuadamente con modelos de corte maltusiano (Goodwin, 1978).

Finalmente, la tercera razón es que las nuevas interpretaciones sobre la estructura dinámica del modelo de Malthus, que se realizaron en los últimos treinta años, han permitido profundizar en algunos aspectos ocultos del *Ensayo* que están provocando un giro radical en las concepciones originales del *principio*. Nos referimos a las investigaciones sobre las oscilaciones en torno al estado estacionario que Malthus trata en el segundo capítulo del *Ensayo* y que, con contadas excepciones (véase por ejemplo Eltis, 1984; Wrigley, 1986; y Waterman, 1987), han recibido una indebida atención en la literatura económica desde los trabajos pioneros de Peacock (1952) y Samuelson (1961).

El objetivo de este documento se concentra precisamente en este último punto y busca analizar las consecuencias prácticas de un mejor conocimiento de las oscilaciones sobre el comportamiento de las poblaciones en el largo plazo. La idea no es hacer exégesis del *Ensayo* sino, más bien, enfatizar la importancia del estudio de las oscilaciones en el entendimiento de los problemas demográficos actuales de países que experimentan cambios en sus estándares de vida debido a *shocks* en las tasas de crecimiento de su población. Con las simulaciones aquí realizadas se insiste en que el análisis de las fluctuaciones puede ayudar

[4] De acuerdo con este autor un modelo maltusiano supone que: *i)* existen rendimientos decrecientes a escala a medida que la población crece, para un nivel dado de tecnología; *ii)* el progreso tecnológico es exógeno en el sentido que no está correlacionado con el estándar de vida o con las presiones demográficas, y *iii)* el tamaño de la población es parcialmente dependiente del estándar de vida.

[5] De hecho, sin rendimientos decrecientes a escala no es posible observar cómo la presión demográfica crea escasez relativa entre los habitantes de una sociedad (Blanchet, 1990: 48).

a comprender mejor el significado de estabilidad y convergencia en cualquier ejercicio de proyección de población.

El documento se divide en dos apartados. En el primero se desarrolla un modelo basado en una ecuación diferencial logística –tipo *Bernoulli*– con rezagos para ilustrar, por un lado, la dinámica estable del *principio* y, por otro lado, las oscilaciones sugeridas por Malthus. En el segundo apartado se lleva a cabo una simulación del crecimiento de la población mexicana con base en el modelo propuesto para ejemplificar la forma en que la actualización del *Ensayo* puede ayudar a esclarecer algunos aspectos de la relación entre las tasas de crecimiento poblacional y del ingreso per cápita que regularmente ignoran los modelos maltusianos.[6] Las conclusiones resaltan, finalmente, la importancia de incorporar el estudio de las oscilaciones en los modelos de crecimiento para tener una idea más clara de los efectos del *principio* en el tratamiento de los problemas demo-económicos actuales.

Un modelo dinámico con rezagos sobre el principio de población de Malthus

En los dos primeros capítulos del *Ensayo*, Malthus (1998) expone de una manera descuidada las razones por las que cualquier población está destinada a vivir al nivel de subsistencia. La base de toda su argumentación descansa en una relación empírica muy discutible entre la producción de alimentos y la cantidad de humanos que hay que alimentar; a saber: mientras la primera crece aritméticamente la segunda lo hace, en ausencia de controles, en forma geométrica.[7] La falta de sustentación teórica de la relación y los supuestos restrictivos sobre los que se erige la famosa trampa maltusiana, que condena a toda sociedad al destino lúgubre del estado estacionario, dieron pie desde un prin-

[6] A lo largo del documento consideraremos al ingreso (producto) per cápita y a los medios de subsistencia como términos intercambiables.

[7] La población es mantenida en un nivel de subsistencia por la acción de los controles o frenos preventivos y positivos que operan constantemente en cualquier sociedad. Los primeros frenos están relacionados con el control natal (postergación de la edad al matrimonio o abstinencia sexual) y los segundos con diversos factores que acortan la duración de la vida (exposición a trabajos peligrosos, malnutrición en la niñez, epidemias, guerras o hambrunas). La eficacia de ambos controles varía inversamente con el nivel de desarrollo de la sociedad. Entre mayor sea el nivel de desarrollo menor será el poder correctivo de los frenos positivos y mayor el de los preventivos. La situación se invierte en las sociedades atrasadas. Los dos tipos de controles pueden entenderse también como "resultantes de la restricción moral, vicio y miseria" (Malthus, 1998: 15).

cipio a defensas y críticas ideologizadas que, hasta la fecha, han reducido injustamente el *Ensayo* a la categoría de un panfleto.

Las desgracias para Malthus no terminan, sin embargo, ahí, ya que ni siquiera entre sus defensores hay consenso sobre la mejor manera de explicar la dinámica del *principio*. La revisión de la literatura reciente revela, en efecto, que aún hoy subsisten grandes desacuerdos entre los maltusianos sobre la forma correcta de representar formalmente las proporciones que deben guardar entre sí las tasas de crecimiento, así como sobre la naturaleza de las ecuaciones requeridas en el análisis.[8]

Sin entrar en detalle en esta polémica, comentaremos brevemente dos aspectos que describen las peculiaridades de nuestro modelo y que, de alguna manera, han propiciado los desacuerdos. Nos referimos al uso de ecuaciones de crecimiento poblacional no exponenciales y a la aceptación de equilibrios no estacionarios en modelos típicamente maltusianos: dos afrentas muy duras de perdonar por los intérpretes *ad litteram* del *Ensayo*. Sobre el primer aspecto cabe decir que, contrario a la práctica habitual, optamos por una ecuación logística en lugar de una exponencial porque consideramos: *i)* al igual que Stigler (1952) y Hartwick (1988), que basta fijar una tasa de crecimiento de la población $P(t)$ mayor que la tasa aritmética de los medios de subsistencia $K(t)$ para establecer adecuadamente el *principio;* y *ii)* que la ecuación diferencial con rezagos –como la aquí propuesta– puede ayudar a explicar de una manera más realista la trayectoria de una población que la exponencial, porque, a diferencia de esta última, toma en cuenta la acción correctiva de los controles y el impacto que tiene el crecimiento de las generaciones pasadas sobre las presentes *(momentums)*. De hecho la ecuación exponencial es la menos maltusiana de las ecuaciones porque se limita a describir el crecimiento de poblaciones que no experimentan controles demográficos ni económicos de ningún

[8] Mientras que Waterman (1987 y 1998) sostiene que es necesario mantener la proporción entre la población (tasa geométrica) y los medios de subsistencia (tasa aritmética) en la manera especificada por Malthus, Pingle (2003) y Hartwick (1988) aseguran que esto no es necesario para analizar el *principio*, debido a que no hay bases suficientes en el *Ensayo* para exigir su utilización forzosa. De acuerdo con estos últimos autores, cualquier proporción entre ambas tasas que mantenga el crecimiento a favor de la población y la relación aritmética de las subsistencias es suficiente para describir la dinámica del *principio*. Igualmente, no hay acuerdo entre los autores acerca de la superioridad de los sistemas lineales sobre los no lineales en la explicación de la dinámica del *principio*. Por ejemplo, Bonneuil (1994) y Blanchet (1998) hacen un balance de los pros y contras derivados de usar ambos tipos de sistemas sin llegar a conclusiones definitivas.

tipo. Una idea que es, sin duda, opuesta a los argumentos centrales del *Ensayo*.

El segundo aspecto es que los autores que buscan explicaciones exegéticas a cada frase de Malthus no están, regularmente, interesados en el análisis de las oscilaciones porque consideran que el equilibrio único y estable del estado estacionario es inevitable.[9] Cualquier desviación del estado estacionario se ve como un proceso de ajuste temporal de los salarios reales, caracterizado por trayectorias en forma de zigzag (Waterman, 1987), que no altera el equilibrio final. El modelo propuesto sostiene, al contrario, que las oscilaciones sí alteran el equilibrio final y que el estado estacionario puede presentarse indistintamente con salarios altos o bajos. Consecuentemente, para lograr una interpretación moderna sobre la dinámica del *principio* es necesario escapar del determinismo fomentado por los maltusianos y construir un sistema formal que presente al estado estacionario como un caso límite, pero que en el ínterin contemple las oscilaciones descritas en el *Ensayo*. Éste es el espíritu del siguiente modelo.

La dinámica estable del principio

El sistema [1] considera que: *i)* las subsistencias son fijadas *socialmente* por una función de producción $K(t)$ que depende de la fuerza de trabajo $P(t)$, el progreso tecnológico $A > 0$ y un parámetro de rendimientos marginales decrecientes de $P(t)$, $0 < \alpha < 1$;[10] y *ii)* la población crece logísticamente como una función directa de la tasa de natalidad r_0 y como una función inversa del recíproco del producto per cápita de la economía $K(t)/P(t)$, expandido por una constante s:[11]

[9] En el capítulo II de su *Ensayo* Malthus se refiere a las oscilaciones como los movimientos retrógrados y progresivos que experimenta el bienestar de la población alrededor del "piso de subsistencia". La duración y amplitud de esas oscilaciones varía en cada sociedad de acuerdo con las condiciones económicas de las diferentes clases sociales, la efectividad de las causas interruptoras del crecimiento de la población (tales como: la introducción o fracaso de ciertas manufacturas, el mayor o menor grado de iniciativa de las empresas agrícolas, los años de abundancia o escasez, las guerras y las epidemias, entre otras) y, en especial, la diferencia entre el precio nominal y el precio real del trabajo. Huelga decir que esas oscilaciones vienen asociadas con diversas tasas de crecimiento de la población.

[10] Ésta es una función estándar propuesta por Stigler (1952) y más adelante usada por autores como Pingle (2003).

[11] De acuerdo con este supuesto un producto medio elevado puede soportar altas tasas de crecimiento poblacional.

$$\frac{dP(t)}{dt} = r_0 P(t) \;\; 1 - s\frac{P(t)}{K(t)} \qquad [1]$$
$$K(t) = AP(t)^{\alpha}$$

Para reducir el sistema [1] a una sola ecuación que exprese el crecimiento de la población en términos del producto per cápita, y de esa manera establecer la relación maltusiana entre las dos tasas, consideraremos que $x(t) \equiv K(t) / P(t) = AP(t)^{\alpha-1}$ crece de acuerdo con la ecuación diferencial:

$$x\;(t) = A(\alpha - 1)P(t)^{\alpha-2}P\;(t) = (\alpha - 1)x(t)\frac{P\;(t)}{P(t)}. \qquad [2]$$

Tras separar variables y sustituir $x(t)$ y la primera ecuación de [1] en [2] tenemos que:

$$\frac{x\;(t)}{(\alpha-1)x(t)} = r_0\left(1 - \frac{s}{x(t)}\right) \qquad [3]$$

$$x\;(t) - r_0(\alpha - 1)x(t) = -r_0 s(\alpha - 1) \qquad [4]$$

cuyo resultado produce finalmente la trayectoria del producto per cápita

$$x(t) = \;\; x_0 - s \;\; e^{r_0(\alpha-1)t} + s \qquad [5]$$

o expresado en términos de tasas de natalidad a y mortalidad b, con $a = r_0$ y $b = r_0 s$

$$x(t) = \left[x_0 - \frac{b}{a}\right]e^{a(\alpha-1)t} + \left(\frac{b}{a}\right) \qquad [6]$$

De esta manera si introducimos [5] en nuestra definición de $x(t) = AP(t)^{\alpha-1}$ y resolvemos para $P(t)$ tendremos, finalmente, la ecuación de la población buscada:

$$P(t) = \left(\frac{x(t)}{A}\right)^{1/(\alpha-1)} \qquad [7]$$

De acuerdo con [7] la trayectoria de la población convergerá a un escalar definido por las tasas de natalidad y mortalidad y la constante tecnológica a medida que:

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = P_e = \left(\frac{s}{A}\right)^{1/(\alpha-1)} \qquad [8]$$

debido a que el $\lim_{t\to\infty} x(t) = s$, y $s = b/a$. Del mismo modo, si sustituimos [7] en la función de producción y aplicamos límites, encontraremos que el atractor de $K(t)$ está regulado por las mismas constantes que $P(t)$

$$\lim_{t\to\infty} K(t) = K_e(t) = A\left(\frac{s}{A}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \qquad [9]$$

La convergencia de [8] y [9] será más pronunciada entre más pequeño sea el valor de α o mayor sea la importancia de los rendimientos decrecientes en la actividad económica. En el caso límite, las tasas instantáneas de todas las variables serán nulas, esto es:[12]

$$\lim_{t\to\infty} P'(t)/P(t) = \lim_{t\to\infty} K'(t)/K(t) = \lim_{t\to\infty} x'(t)/x(t) = 0 \qquad [10]$$

La razón obedece a que con rendimientos decrecientes la producción crecerá a un ritmo menor que la población, provocando una permanente caída en el producto per cápita. La pérdida de bienestar resultante desacelerará, a su vez, al crecimiento demográfico y de la producción hasta el punto en que $x(t)$ deje de crecer o converja al estado estacionario.

La influencia de los salarios per cápita en este proceso puede verse a través de la relación de s con la tasa de mortalidad. Si suponemos, como es práctica habitual, que la tasa media de mortalidad es una función inversa de los salarios per cápita w, y que $b = r_0 s$, entonces

$$s = f(w) \qquad [11]$$

donde $w = \alpha A P^{\alpha-1} = \alpha x(t)$ es el producto marginal del trabajo.

[12] La relación entre los límites de las tasas instantáneas de la población y el producto per cápita queda más clara si expresamos a $K(t)$ primero en términos logarítmicos y, luego, derivamos la ecuación. El resultado es $\alpha\, P(t)/P(t) = K(t)/K(t)$, donde se puede constatar que a medida que α se aproxime a cero ambas tasas instantáneas serán nulas.

Ahora bien, ya que $\frac{ds}{dw} < 0$ y $\frac{dP_e(t)}{dw} = \frac{dP_e(t)}{ds}\frac{ds}{dw}$, entonces podemos apreciar que hay una relación positiva entre $P(t)$ y w

$$\frac{dP_e(t)}{dw} = \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{s}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}-1}\frac{ds}{dw} > 0 \qquad [12]$$

La relación entre las dos variables no es, sin embargo, proporcional, pues está mediada por el parámetro α, de tal suerte que una disminución en s debido a una caída en w puede redundar en una caída aún mayor en $P(t)$ por efecto del término de inhibición $-bP^2(t)-$ entre más pequeño sea el valor de α. Y como esto es también válido para $K(t)$, entonces una variación en w acompañada de valores bajos de α tenderá a influir más que proporcionalmente en los cambios experimentados por los medios de subsistencia y la población.

La ecuación logística con rezagos y la existencia de oscilaciones

Hasta aquí, el análisis dinámico del *principio* que expresan las ecuaciones [1]-[12] predice, con diferentes herramientas, los mismos resultados que cualquier modelo maltusiano tradicional y, por ende, no dice mucho acerca del comportamiento de las variables antes de alcanzar el estado estacionario. Por este motivo introduciremos rezagos en las variables para determinar su capacidad de respuesta de una manera más realista. En particular supondremos que la tasa de crecimiento poblacional no es afectada por la tasa de natalidad de manera instantánea, sino que existe un periodo de retraso durante el cual $P(t-\tau)$ influye sobre $P(t)$ a través de las tasas medias de natalidad y mortalidad. De esta manera el efecto no lineal generado por las fluctuaciones del producto per cápita (o "medios de subsistencia") se puede capturar directamente en la variable $P(t)$ mediante un rezago τ en el término de inhibición de la ecuación logística (véase Kuang, 1993):

$$\frac{dP(t)}{dt} = r_0 P(t)\left[1 - s\frac{P(t-\tau)}{K(t)}\right]$$

$$K(t) = AP(t)^{\alpha} \qquad [13]$$

La fijación de la longitud del rezago τ es arbitraria y su estimación puede tener diferentes implicaciones para cada una de las fases de la transición demográfica de una población. Debido a esto es importante no adelantar ningún valor de τ sin antes conocer la situación demográfica concreta de una sociedad, aun cuando algunos autores sugieran que un periodo de 25 años es suficiente para atender la propuesta hecha por Malthus en el *Ensayo* (véase, por ejemplo, Waterman, 1987). En cualquier caso es sabido que la primera ecuación de [13] convergerá a un punto fijo estable si $r_0\tau < \pi/2$ (Kuang, 1993). De aquí que si suponemos que $r_0\tau < \pi/2$ entonces podemos asegurar que existe un punto de equilibrio estable P_e en el largo plazo en el que $\lim_{t\to\infty} \frac{P'(t)}{P(t)} = 0$ y $\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} P(t-\tau) = P_e$. Este límite está dado por la ecuación [14].

$$P_e = \left(\frac{s}{A}\right)^{1/(\alpha-1)} \qquad [14]$$

Como se puede apreciar, el valor estacionario de la ecuación logística con rezagos coincide con el del atractor del sistema [1], lo que significa que los rezagos pueden alterar el comportamiento de las trayectorias en torno al estado estable pero no su valor límite. El rezago incorpora la posibilidad de oscilaciones de la población en torno a P_e en el corto plazo, ya que dependiendo de los valores de r_0 y τ, el término $P(t-\tau)$ puede experimentar comportamientos cuasi-periódicos en algún intervalo de tiempo (Gopalsamy, 1992). Las fluctuaciones producidas por $P(t-\tau)$ obedecen al efecto que tienen los cambios en los medios de subsistencia sobre las tasas medias de natalidad y mortalidad durante el intervalo $(t-\tau,\ t)$. De aquí que sea factible esperar que la población oscile en torno a su punto de equilibrio, dependiendo de las variaciones en los medios de subsistencia existentes.

¿Cómo es la naturaleza de esas oscilaciones? Kuang (1993) señala que si se cumple la condición de que $r_0\tau < \pi/2$ entonces las oscilaciones producidas por ecuaciones como [13] serán temporales y no alterarán la estabilidad asintótica global de las trayectorias en la vecindad del atractor estable.[13] Pero si $r_0\tau > \pi/2$ entonces las cosas cambiarán radicalmente debido a que en ese intervalo las trayectorias no tenderán a

[13] La amplitud de las oscilaciones dependerá del valor absoluto del factor de expansión así como de la longitud de τ.

converger hacia algún atractor estable y, en consecuencia, las oscilaciones serán permanentes.

Una aplicación al caso de México

Para lograr una interpretación más intuitiva del modelo basado en las ecuaciones [1]-[14] realizaremos una simulación de la trayectoria de población mexicana considerando los siguientes dos puntos: *1)* la ecuación [7] puede adaptarse indistintamente para describir equilibrios maltusianos con salarios bajos y altos; y *2)* el valor límite de [14] es el mismo con tasas de natalidad y mortalidad variables y constantes.

En lo que toca al primer punto, Dooley (1998) menciona que el nivel de subsistencia es fijado por la respuesta de la población a los salarios, y como esa respuesta es variable entonces es dable esperar diferentes "niveles de subsistencias". En particular hay dos situaciones polares en las sociedades: la de "alta presión" que caracteriza a los países pobres donde el nivel de subsistencia es fijado a salarios bajos y la de "baja presión" o de salarios altos asociada con la experiencia de los países desarrollados. La primera situación reproduce el cuadro clásico del *Ensayo* donde el crecimiento de la población y el producto per cápita se mueven en la misma dirección, mientras que la segunda describe la versión moderna del equilibrio maltusiano en la que una caída en el producto per cápita puede estar acompañada, incluso, por crecimientos positivos de la población o viceversa (Dooley, 1998: 4). Otra forma de apreciar estas relaciones es analizando la tasa instantánea del crecimiento del producto per cápita que se obtiene dividiendo [2] por $x(t) = K(t)/P(t)$; esto es:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{A'(t)}{A(t)} + (\alpha - 1)\frac{P'(t)}{P(t)} \qquad [15]$$

De acuerdo con esta expresión, si $\frac{A'(t)}{A(t)} \geq (1-\alpha)\frac{P'(t)}{P(t)}$ y $0 < \alpha < 1$, entonces la tasa instantánea de crecimiento del producto per cápita será positiva independientemente del crecimiento de la población, pero en caso contrario la situación será muy diferente: la primera tasa será decreciente respecto a la última.[14] En consecuencia, si considera-

[14] En particular si no existe cambio tecnológico, siempre se observará este comportamiento.

mos distintos intervalos de tiempo para uno o varios países y estimamos empíricamente $x'(t)/x(t)$ y $P'(t)/P(t)$ es posible observar una relación inversa para algunos periodos y positiva para otros, sin salirnos del esquema maltusiano (Blanchet, 1990).

El segundo aspecto está relacionado con el hecho de que la introducción de tasas variables de natalidad y mortalidad no altera el valor límite de [14], pero sí sus condiciones de convergencia. Para ilustrar este punto simularemos el sistema [13] considerando como Ordorica (1990) que la tasa de natalidad sigue un comportamiento logístico y parecido a la tasa de mortalidad (pues como sabemos $b = r(t)s(t)/K$ es una función inversa del producto per cápita):

$$r_0(t) = k_1 + \frac{k_2}{1 + e^{a_1 + a_2 t}} \qquad [16]$$

donde k_1 y $k_1 + k_2$ son, respectivamente, las asíntotas inferior y superior de la tasa de natalidad; a_1 es el nivel de la natalidad y a_2 la velocidad de cambio de $r(t)$. La ecuación resultante del nuevo añadido es:

$$\frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = \quad k_1 + \frac{k_2}{1 + e^{a_1 + a_2 t}} \quad 1 - s(t)\frac{P(t-\tau)}{K(t)} \qquad [17]$$

cuyo valor límite es similar a [14] dado que $\lim_{t\to\infty} r_0(t) = k_1$; $\lim_{t\to\infty} s(t) = s$; $\lim_{t\to\infty} P(t-\tau) = P$; $\lim_{t\to\infty} K(t) = K = AP^{\alpha}$ y $\lim_{t\to\infty} A(t) = A$; esto es:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{P(t)}\frac{dP(t)}{dt} = \lim_{t\to\infty}\left[k_1 + \frac{k_2}{1 + e^{a_1 + a_2 t}}\right]\left[1 - s(t)\frac{P(t-\tau)}{K(t)}\right] \Rightarrow P_e(t) = \left(\frac{A}{s}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

La gran diferencia entre [17] y [13] reside en el recorrido de las trayectorias de población, pues la perturbación producida por $r_0(t)$ acentúa aún más las oscilaciones producidas por el rezago τ en la relación establecida por $\frac{x'(t)}{x(t)}$ y $\frac{P'(t)}{P(t)}$ en [15].

Simulación

Los resultados que presentamos a continuación consideran el impacto de los rezagos, primero, sobre la relación entre $P'(t)/P(t)$ y $K'(t)/K(t)$ y luego sobre la estabilidad y convergencia de las proyecciones de la población mexicana entre 1930 y 2050. Para el primer caso se estima la ecuación [15] con el siguiente modelo de regresión

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \qquad [18]$$

donde $X_t = \dfrac{\Delta P_t}{P_t}$ es la tasa de crecimiento de la población, $Y_t = \dfrac{\Delta K_t}{K_t}$ la tasa de crecimiento del producto per cápita y u_t el error aleatorio. Para el segundo caso se toma el modelo

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + u_t \qquad [19]$$

para estimar una versión simplificada de [17] con $Y_t \; \dfrac{\Delta P_t}{P_t} = r_0 \left[1 - \dfrac{P_t}{K}\right]$ y u_t el error aleatorio.

Los datos sobre población y producto (a precios constantes) que se usan en ambos modelos provienen de INEGI mientras que los valores de τ se fijan a discreción tomando como población inicial P_{1930} = 17063300. El estimador del parámetro α se supone igual al valor esperado de la variable aleatoria de una distribución uniforme cero-uno, es decir $\alpha = 0.5$.[15] Para calcular la tasa media anual de natalidad y la población estacionaria se usa la serie de tiempo P_t suponiendo que no hay migración ni cambios en la estructura etaria y que [19] evoluciona conforme a los siguientes valores calculados por Ordorica (1990): k_1 = 0.010, k_2 = 0.040, a_1 = -3.53927 y a_2 = 0.059483. Las rutinas de los métodos numéricos están basados en los códigos de software disponibles en <http://www.runet.edu/~thompson/webddes>.

Los efectos de los rezagos en la transición demográfica

Las corridas de los cuadros 1.1 y 1.2 muestran que los coeficientes de regresión entre las tasas de crecimiento del producto per cápita y de la población tienden a ser alternativamente positivos y negativos a medida que se incrementan la longitud de τ y el periodo de su impacto.[16] De hecho, podemos asegurar que no hay un patrón definido por

[15] Originalmente habíamos estimado para México un $\alpha = 0.68$, pero decidimos tomar el valor de $\alpha = 0.5$ para seguir el consejo de Blanchet (1990). En cualquier caso los resultados no varían sustancialmente y las conclusiones son las mismas.

[16] Sobre la interpretación del significado de la longitud de τ consúltese a Partida (2007) para ver la importancia de la contribución del crecimiento de generaciones pasadas a las presentes en el caso de México.

CUADRO 1.1
Simulación con 25 años de rezago

Periodos	*Tasa media de crecimiento del producto per cápita*	*Tasa media de crecimiento de la población*	*Coeficiente de regresión*
1956-1960	0.0308	0.0384	2.5697*
1961-1965	0.0386	0.0301	-18.3290*
1966-1970	0.0240	0.0294	5.7339*
1956-1970	0.0231	0.0287	-1.0297*

NOTA: Los asteriscos indican que los coeficientes son estadísticamente significativos dado un *p-value* menor que 0.05.

años de rezago ni por periodo de elección, por lo que no es posible asociar el mismo esquema de los países desarrollados a las primeras dos fases de la transición demográfica en México.[17] De acuerdo con los cuadros, los signos de los coeficientes obedecen más a una debilidad crónica de las tasas de crecimiento del producto per cápita que a un cambio en las condiciones materiales de la población. Por ejemplo, si escogemos los quinquenios de los dos cuadros en que se registran coeficientes negativos notaremos que éstos aparecen arbitrariamente con tasas decrecientes, crecientes o negativas del producto per cápita que con tasas crecientes, decrecientes y positivas de la población. Es decir, no hay regularidad entre la tendencia de las tasas que permita fundamentar una conclusión, como tampoco la hay cuando buscamos explicar los coeficientes positivos, pues en ese caso el signo se mantiene, incluso, con descensos acentuados del crecimiento de la población. La única constante en las tablas es la trayectoria oscilante a la baja de la tasa de crecimiento del producto per cápita que, si consideramos el descenso secular de la tasa de crecimiento poblacional, le otorga a la transición demográfica mexicana un toque maltusiano clásico. Las dos

[17] Los cuadros abarcan las dos etapas iniciales de la transición demográfica. De acuerdo con Partida (2007), la primera etapa arranca alrededor de 1930 con el rápido descenso de las tasas de mortalidad y el movimiento relativamente constante de las tasas de natalidad (las cuales incluso aumentaron entre 1945 y 1960). Durante ese periodo las tasas de crecimiento de la población y de ingreso per cápita se mueven en la misma dirección al crecer 3 y 2%, respectivamente. La segunda etapa (1970-2000) se caracteriza por una acentuada baja en las tasas de natalidad que provoca una caída en el ritmo del crecimiento poblacional de 3.36% en 1971-1975 a 1.6% anual en el último quinquenio y por un errático movimiento en la tasa de crecimiento del ingreso per cápita. Finalmente, en la tercera etapa (2001-2050) se espera que las tasas de natalidad y mortalidad converjan a una misma trayectoria para asegurar un crecimiento bajo y estable de la población.

CUADRO 1.2
Simulación con 40 años de rezago

Periodos	*Tasa media de crecimiento del producto per cápita*	*Tasa media de crecimiento de la población*	*Coeficiente de regresión*
1971-1975	0.0282	0.0336	-3.1371*
1976-1980	0.0399	0.0303	-23.5727*
1981-1985	-0.0064	0.0268	10.8589*
1986-1990	-0.0049	0.0233	-26.7466*
1991-1995	-0.0036	0.0198	27.7852*
1996-2000	0.0375	0.0165	-0.7436*
1971-2000	0.0205	0.0303	0.6230*

NOTA: Los asteriscos indican que los coeficientes son estadísticamente significativos dado un *p-value* menor que 0.05.

tasas tienden a moverse en la misma dirección y la dominancia en la caída de una sobre la otra explica las diferencias de signo.

Bajo estas circunstancias es realmente difícil esperar que se presenten los efectos favorables del crecimiento poblacional de las generaciones pasadas sobre las presentes (como podría ser el bono demográfico) durante los dos periodos considerados. Sin tasas vigorosas de crecimiento del producto per cápita no hay posibilidad de que los efectos de un mejor nivel de vida –estimado en el año proyectado por el rezago– se reflejen *masivamente* en esquemas demográficos más modernos. Esto no quiere decir que no haya grandes sectores de la población urbana en los que se observen patrones de una transición demográfica parecida a la de los países desarrollados, sino que el alza en el nivel de vida experimentada básicamente por esa capa de la población no es suficiente para arropar un cambio demográfico en la gran masa depauperada.[18] Por esta razón el cambio de signos positivos a negativos entre las dos tasas conforme aumenta el nivel de bienestar, tal como lo documenta Blanchet (1990) para varios países con el uso de un modelo maltusiano, no tiene necesariamente el mismo significado en México.

[18] Otros estudios pioneros en México, como el de Morelos (1969), encuentran una relación negativa más definida en algunos quinquenios de los dos periodos aquí considerados (en particular durante el llamado *desarrollo estabilizador*).

Los rezagos en las proyecciones de población

Los efectos de los rezagos se aprecian más nítidamente al analizar la convergencia y estabilidad de la trayectoria de la población en torno al atractor estable (o "estado estacionario"). Para tal efecto haremos una comparación entre nuestras proyecciones y las que realizan el Consejo Nacional de Población (2006) y Ordorica (1990 y 2006). La idea es comparar los valores estimados de la población con metodologías que comparten similitudes y diferencias pero que no incluyen, como en nuestro caso, rezagos. Entre las similitudes hay que destacar la utilización de una ecuación logística como base del ejercicio (Ordorica y nosotros) y, entre las diferencias, la naturaleza eminentemente demográfica de las proyecciones de Conapo y Ordorica contra la versión económico-demográfica de nosotros.

En concreto, Conapo concluye que la población del país describe un comportamiento casi logístico entre 1930 y 2050 con un valor límite en el último año. Las hipótesis de sus proyecciones –realizadas con base en componentes demográficos por cohortes– toman en cuenta una estructura por edades estacionaria (o maltusiana) y diferentes escenarios de crecimiento estable para la fecundidad, la mortalidad y los saldos netos migratorios. Los datos de la gráfica 1 alcanzan un máximo de 122.9 millones en 2040 y un valor estable de 121.9 millones diez años después. La fijación del techo máximo del crecimiento de la población no incorpora hipótesis económica alguna sobre el crecimiento del producto per cápita. El trabajo de Ordorica incluye, por su parte, hipótesis de comportamiento logístico sobre las tasas de mortalidad y fecundidad pero sin considerar cambios en la migración y la estructura por edades. Sus resultados no registran ningún valor límite debido a que su especificación sobre la trayectoria de $P(t)$ no es convergente.

Finalmente, nuestra proyección se calcula con [19] suponiendo una longitud de rezago de 25 años. De acuerdo con el cuadro 2 y la gráfica 1, la introducción de un techo económico y el "efecto de arrastre" de patrones de fecundidad rezagados genera volúmenes de población superiores a los de Conapo pero inferiores a los de Ordorica en 2050. De hecho, la serie de datos de [19] alcanza su valor límite en un año diferente de 2050, pues su convergencia a $P_e(t)$ = 135 019 560 depende del valor de τ. Los distintos recuadros de la gráfica 2 muestran este último aspecto al hacer evidente que entre mayor sea la longitud de τ mayor será el tiempo que toma a

CUADRO 2
Proyecciones de la población mexicana según varias fuentes (millones)

Año	*Población por Conapo*	*Población por Ordorica*	*Población proyectada con un rezago de 25 años*
1930	17.1	17.1	17.1
1940	19.7	21.4	24.9
1950	25.8	28.2	35.7
1960	34.9	38.3	51.1
1970	48.2	52.5	71.6
1980	66.8	70.9	94.1
1990	81.2	92.5	114.5
2000	97.5	114.9	129.4
2010	107.9	136.1	137.9
2020	115.4	154.8	141.4
2030	120.7	171.5	142.2
2040	122.9	186.6	141.8
2050	121.9	201.1	141.1

FUENTE: INEGI, Censos de Población y Vivienda, 1895-2000.

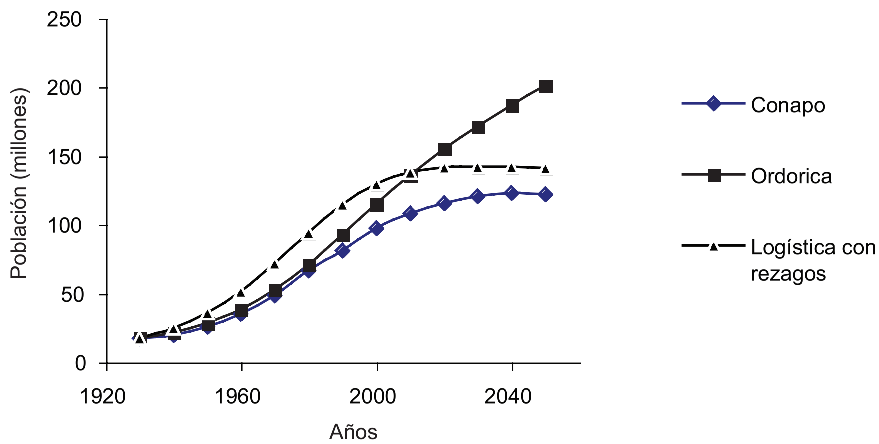
la serie en converger a $P_e(t)$ y más acentuada la presencia de oscilaciones.[19]

En resumen, podemos concluir que las estimaciones basadas en [19] suponen que la población de México converge en un punto estable de "salarios altos" en el largo plazo en virtud de que $r_0\tau =$, (0.031) $(\tau) < \pi/2$, $\tau \in (0.50)$. El valor límite de esa población es diferente en volumen y fechas de convergencia de las cifras oficiales calculadas por Conapo, en parte por la magnitud de los rezagos introducidos y en parte por la sobreestimación que produce incluir techos económicos más amplios a una población con patrones de fecundidad menos modernos. La acción de ambos componentes explica la joroba más pronunciada de la trayectoria de $P(t)$ en nuestra proyección que en la de Conapo (véase la gráfica 1). Las oscilaciones se explican por la presencia del rezago en el componente $s\frac{P(t-\tau)}{K}$ pues, como se observa en

[19] Después de hacer varias simulaciones encontramos que el valor límite de la población es de 135 019 660 y que proyecciones con rezagos mayores a 25 años tienden a diferir sustancialmente de la calculada por Conapo. En particular un rezago entre 10 y 25 parece más apropiado para igualar las cifras oficiales.

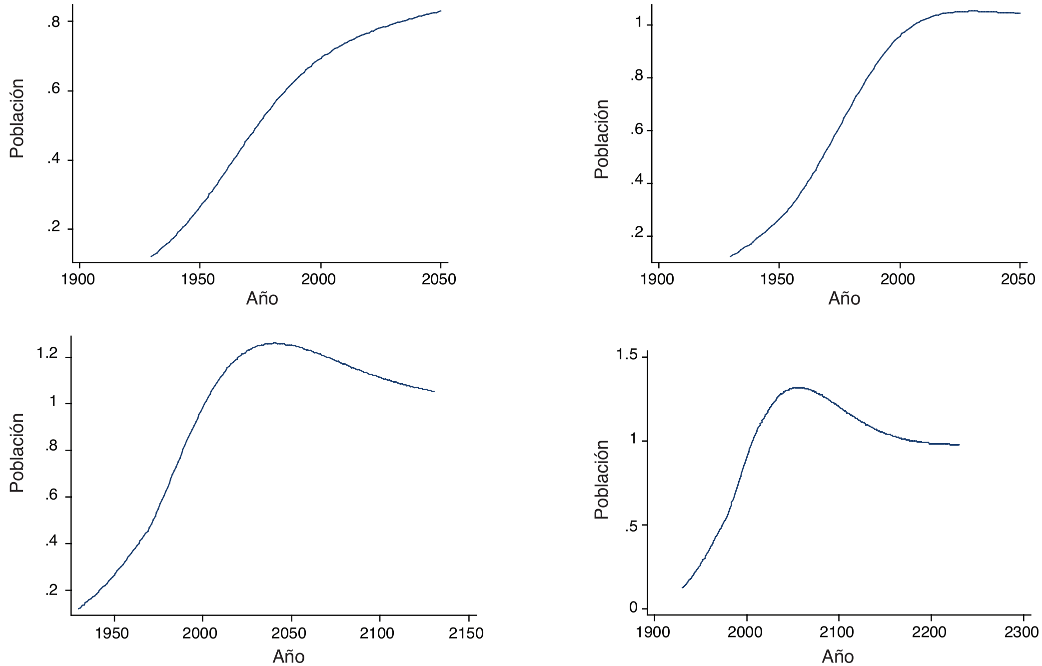
GRÁFICA 1

México: proyecciones de población entre 1930 y 2050



GRÁFICA 2

Proyecciones de la población mexicana entre 1930 y 2050 con múltiples rezagos



NOTA: Los recuadros de izquierda a derecha y de arriba abajo muestran la trayectoria de la población mexicana con 0, 25, 40 y 50 años de rezago. El número uno de la escala en la ordenada es equivalente al valor de la población estacionaria.

la gráfica 2, conforme aumenta el tamaño del rezago se acentúa el efecto de la variación en el producto per cápita (reflejados mediante $P(t-\tau)/K$) sobre la población. En particular para valores de $25 \leq \tau \leq 50$ las oscilaciones son más marcadas respecto del punto de equilibrio. El resultado es previsible e intuitivo porque para observar fluctuaciones en el tamaño de la población es necesario considerar periodos suficientemente largos en el tiempo a fin de que el mecanismo de los medios de subsistencia surta efecto en la dinámica de la población.[20]

A manera de conclusión: ¿por qué es importante no olvidar a Malthus?

El documento sostiene que el estudio actualizado del principio de población de Malthus admite equilibrios dinámicos con oscilaciones que pueden mejorar la comprensión sobre la estabilidad y convergencia de las poblaciones en el largo plazo. La conclusión es reveladora no sólo porque rompe con la idea largamente establecida de que el *principio* ofrece únicamente soluciones predecibles y estacionarias para países pobres (salarios bajos), también porque abre una oportunidad para replantear los equilibrios de los modelos demo-económicos tradicionales. Este último punto es importante porque la mayoría de los autores pasa por alto el estudio sistemático de las oscilaciones para concentrarse, casi exclusivamente, en el uso de modelos que revelen trayectorias *suaves* de crecimiento de la población y los medios de subsistencia.

Los resultados basados en [17] son hasta cierto punto novedosos por dos motivos. Primero porque su uso permite predecir comportamientos futuros de la población con más elementos que las tradicionales proyecciones demográficas basadas en las tendencias pasadas de $P(t)$. Los ajustes continuos y bien ponderados en los valores de los parámetros α, r_0, A y τ de [17] pueden auxiliar en la elaboración de pronósticos acordes con la situación económica de un país. Y segundo, porque el análisis del *principio* con base en esa ecuación facilita la traducción de las oscilaciones al lenguaje matemático y, en consecuencia, la comprensión de las ideas demográficas más acabadas de Malthus.

Pero aquí hay que tener cuidado en no pecar de ingenuidad. Para empezar, las ecuaciones están expuestas a duros cuestionamientos

[20] En nuestro ejemplo parece comprobarse la hipótesis maltusiana enfatizada por Waterman (1987) de que las fluctuaciones aparecen en el tiempo de una generación, esto es, cada 25 años.

debido a los supuestos restrictivos que utilizan para fundamentar el comportamiento de la población. Es casi atrevido suponer que México, un país de ingreso medio, encaja en un mundo maltusiano de la forma como lo sugiere el modelo propuesto o que los resultados de las proyecciones puedan tener credibilidad cuando se ignoran los cambios en la estructura etaria y en la migración internacional. Ninguna persona sensata, ni siquiera nosotros, podría estar de acuerdo en reducir la compleja trama de la transición demográfica en México a una comparación entre tasas o confiar el conocimiento de la población mexicana futura a una ecuación diferencial. Pero tampoco nadie sensato podría aceptar la conclusión, fundada en la simple lectura de las tasas agregadas de mortalidad y fecundidad, de que México experimenta una transición demográfica suave y homogénea cuando se observa un deterioro progresivo en el producto per cápita, o que las proyecciones de población asuman un *estado estable* sin ninguna referencia abierta a las condiciones económicas que condicionan los patrones demográficos. Y, sin embargo, estas últimas verdades oficiales se aceptan sin ningún empacho.

México es un país que de ninguna manera experimenta una transición demográfica parecida a la de los países desarrollados y, por lo tanto, resulta poco afortunado considerar que la relación inversa entre las dos tasas de crecimiento es una medida de su pasaje a la modernidad. La heterogeneidad de las condiciones materiales y culturales que caracteriza a las regiones del país es una explicación casi infalible para justificar la presencia de factores que retardan y aceleran por igual las bajas en las tasas de mortalidad y fecundidad. Y eso no es señal de conductas demográficas atrasadas, sino del hecho, insistentemente señalado por Malthus, de que la población experimenta movimientos retrógrados y progresivos porque sus respuestas reflejan sus diferencias de clase social. Entre más escindida esté una población, más heterogénea será su conducta demográfica, más acentuadas serán las oscilaciones y menos claro será el significado de las relaciones negativas y positivas entre las dos tasas de crecimiento.

Desafortunadamente los datos de la simulación basada en [19] no permiten reflejar esas diferencias entre la población mexicana. El uso sin ningún criterio de diferenciación de medidas como el producto per cápita impide apreciar los movimientos retrógrados o progresivos señalados por Malthus y, por lo tanto, constituye una seria deficiencia del ejercicio aquí realizado. Para la correcta instrumentación del modelo se requiere información desagregada que ilustre las diferencias de conductas demográficas por grupo social o al menos por región. De otra manera las conclusiones de la simulación estarían muy lejos del espíritu que anima la modelación dinámica del *principio*, y la investigación ulterior sobre las oscilaciones carecería de sentido práctico.

Sin embargo, más allá de la validez del modelo o de esta falla en la simulación, lo importante es dejar en claro que las oscilaciones descritas en el *Ensayo* no son una mención aislada o marginal del estado estacionario, sino una consecuencia de la visión diferencial de Malthus sobre las conductas demográficas prevalecientes en una sociedad. Las diferencias culturales que afectan las decisiones de fecundidad, o las desigualdades materiales que modelan los patrones de morbilidad-mortalidad son aspectos presentes en el estudio de las oscilaciones y constituyen una gran lección de Malthus. La simplificación de su pensamiento en aras de un mayor rigor matemático que han realizado algunos autores neoclásicos, o los marxistas para efectos de su caricaturización, es igualmente dañina para entender los rezagos como un resultado social de todas esas diferencias. Para Malthus la población no reacciona de igual manera porque no todos los individuos tienen los mismos recursos. Por esa razón los ajustes instantáneos entre las tasas de crecimiento y la homogeneización de formas de vida en el estado estacionario son formas conceptuales que se oponen al pensamiento maltusiano y pertenecen, más bien, a sus críticos e interlocutores de diversos signos ideológicos.

La intención de modelar el *principio* de Malthus no es, pues, un mero ejercicio de exégesis sino un medio para revitalizar con nuevas herramientas el objeto de estudio de los fallidos modelos demo-económicos o, más recientemente, de los modelos de generaciones traslapadas. Las versiones modernas del principio de población, con todas sus deficiencias y cargas ideológicas largamente señaladas, tienen el mérito de haber puesto otra vez a la demografía en el centro de los grandes problemas económicos al revelar un hecho sutil: la existencia de situaciones conflictivas previas al estado estacionario que pueden afectar su estabilidad y convergencia. Nos referimos a los terribles problemas derivados de la deforestación, el agotamiento de los mantos acuíferos o el ensalitramiento de las tierras arables, que quiérase o no alejan a las regiones más empobrecidas de toda posibilidad de alcanzar los patrones modernos de la transición demográfica.

Por todo esto a Malthus no se le puede criticar negándolo, sino exhibiéndolo, contrastando objetivamente sus ideas. El pudor o quizás vergüenza de aceptar la actualidad de las ideas de Malthus es uno de los demonios más duros de vencer. Y eso, en las condiciones de hacinamiento en que vive una gran parte de la población mundial, suena a mera hipocresía. Es curioso, pero las ideas de Malthus que han permanecido triunfantemente codificadas por más de 100 años en los textos de biología, ecología y economía despiertan resquemor y bajas pasiones en demografía: la tierra original de las ideas del inglés.

Bibliografía

Blanchet, D. (1990), "Population Growth and Income Growth during the Demographic Transition: Does a Malthusian Model Help Explain the Relationship?", *Population,* núm. 2, pp. 37-52.

Blanchet, D. (1998), "Demographic Models and Chaotic Demo-Dynamics", *Population: An English Selection,* vol. 10, núm. 1, pp. 139-150.

Bonneuil, N. (coord.) (1994), "Non Linear Models in Demography", *Mathematical Population Studies,* número especial, vol. 5, núm. 1, pp. 1-119.

Conapo (Consejo Nacional de Población) (2006), *Proyecciones de la población de México 2005-2050,* México, Conapo.

Dooley, P. (1988), "Malthus on Long Swings: The General Ease", *Canadian Journal of Economics,* vol. 21, núm. 1, pp. 206-207.

Eltis, W. (1984), *The Classical Theory of Economic Growth,* Nueva York, St Martin's Press, pp. 206-207.

Goodwin, R. (1978), "Wicksell and the Malthusian Catastrophe", *The Scandinavian Journal of Economics,* vol. 80, núm. 2, pp. 190-198.

Gopalsamy, K. (1992), *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics,* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.

Hartwick, J.M. (1988), "Robert Wallace and Malthus and the Ratios", *History of Political Economy,* núm. 20, pp. 357-379.

INEGI (varios años), *Censos de Población y Vivienda, 1895-2000* <http://www.inegi.gob.mx>.

Kuang Y. (1993), *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics,* Londres, Academic Press.

Malthus, T.R. (1998), *Ensayo sobre el principio de población,* 2ª ed., México, FCE.

Morelos, José B. (1969), "El problema demográfico de México", *Demografía y Economía,* vol. 3, núm. 3, pp. 319-327.

Ordorica, M. (1990), "Ajuste de una función expologística a la evolución de la población total de México, 1930-1985", *Estudios Demográficos y Urbanos,* vol. 5, núm. 3 (15), pp. 373-386.

Ordorica, M. (2006), "Cuatro escenarios de la población de México para fines del siglo XXI construidos a través de una función exponencial", en J.L. Lezama y J.B. Morelos (coords.), *Población, ciudad y medio ambiente en el México contemporáneo,* México, El Colegio de México.

Peacock, A.T. (1952), "Theory of Population and Modern Economic Analysis", *Population Studies,* vol. 6, núm. 2, pp 114-122.

Partida V. (2007), "Demographic Transition, Demographic Bonus and Ageing in Mexico", *United Nations Expert Group Meeting on Social and Economic Implications of Changing Population Age Structures (Mexico City 31 August - 2 September 2005),* Nueva York, United Nations, pp. 285-307 (ESA/P/WP.201).

Pingle, M. (2003), "Introducing Dynamic Analysis Using Malthus's Principle of Population", *Journal of Economic Education,* vol. 34, núm. 1, pp. 3-20.

Samuelson, P. (1961), *Foundations of Economic Analysis,* Cambridge, Harvard University Press.

Stigler, G.J. (1952), "The Ricardian Theory of Value and Distribution", *Journal of Political Economy,* vol. 60, núm. 3, pp. 187-207.

Waterman, A.M.C. (1987), "On the Malthusian Theory of Long Swings", *The Canadian Journal of Economics,* vol. 20, núm. 2, pp. 257-270.

Waterman, A.M.C. (1998), "Malthus, Mathematics, and the Mythology of Coherence", *History of Political Economy,* vol. 30, núm. 4.

Wrigley, E.A. (1986), "Introduction", en E.A. Wrigley y David Souden (coords.), *The Works of Thomas Robert Malthus,* vol. 1, Londres, William Pickering.

Acerca de los autores

José Carlos Ramírez nació en Monterrey, N.L. Cuenta con dos licenciaturas, una en Matemáticas y la otra en Economía. Tiene dos maestrías: en Demografía por El Colegio de México, y en Economía por el Centro de Investigación y Docencia Económica (CIDE). Se doctoró en Economía por la Universidad de Sussex (IDS), Inglaterra, en 1995. Actualmente es profesor del Departamento de Economía y Negocios de la Universidad Anáhuac y está a cargo de su área de Matemáticas. Entre 2002 y 2008 trabajó como profesor investigador en el Departamento de Economía del ITESM y en 2007 fue nombrado director académico de la División de Negocios del ITESM-CCM. Entre 1993 y 2002 fue director del Departamento de Matemáticas y Estadística del CIDE, en donde además fue profesor por nueve años. También ha sido profesor en el doctorado en Economía de El Colegio de México. Ha sido consultor en el área de riesgos y ha impartido cursos de sistemas dinámicos en algunas instituciones públicas y privadas de Centroamérica y Sudamérica. Ha publicado alrededor de 50 artículos en revistas especializadas nacionales e internacionales, y ha participado en congresos de diversos tópicos de economía matemática en Europa y Estados Unidos. Actualmente escribe un libro intitulado "Los fundamentos

matemáticos del análisis dinámico en economía", en donde aborda las distintas aplicaciones de la teoría de sistemas dinámicos y juegos diferenciales a la economía. Es miembro de la Sociedad Matemática Mexicana y del Sistema Nacional de Investigadores, nivel III. Entre sus logros destaca la obtención de una Mención Honorífica en el Premio Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico 1997, convocado por el Consejo Consultivo SEP-Conacyt; Tercer Lugar en el Premio Rómulo Garza 2005; Premio al Mejor Investigador del ITESM-CCM en 2005, y Premio al Mejor Profesor del ITESM-CCM en 2004.

José B. Morelos es licenciado en Economía por el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey. Estudió los cursos Básico y la Especialización en Demografía en el Centro Latinoamericano de Demografía. Es maestro en Artes por la Universidad de Pensilvania y candidato a doctor por la misma universidad. Fue secretario de la Comisión de Población y Desarrollo del Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales. Desde 1967 es profesor investigador de El Colegio de México, en donde además fue director del Centro de Estudios Demográficos y de Desarrollo Urbano (CEDDU), coordinador de la maestría en Demografía y del doctorado en Ciencias sociales con Especialidad en Población. En dicho Centro ha impartido los cursos de Fuerza de Trabajo, y de Mortalidad, así como los Seminarios de Investigación a los estudiantes de la maestría en Demografía y del doctorado en Estudios de Población. Asimismo ha sido profesor de Demografía en la Escuela de Economía y en la Facultad de Ciencias Políticas y Sociales de la UNAM y en el Programa de Posgrado de la Escuela de Arquitectura del Instituto Politécnico Nacional. Ha compilado libros sobre temas demográficos y ha publicado artículos sobre población y desarrollo, fuerza de trabajo y mortalidad en distintas revistas especializadas.

Leovardo Mata Mata es maestro en Economía por El Colegio de México. Estudió la licenciatura en Física y Matemáticas en la Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional. En 2004 y 2005 fue subdirector de Desarrollo de Proyectos en la Dirección Ejecutiva de Informática y Estadística de la Secretaría de Seguridad Pública del Distrito Federal. Ha impartido seminarios, diplomados y cursos en diversas instituciones, entre las que sobresalen El Colegio de México, el Centro de Capacitación y de Formación Permanente de la Cámara de Senadores, la Universidad Anáhuac, la Universidad

Iberoamericana, el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, la Escuela Superior de Economía del Instituto Politécnico Nacional y la Universidad Autónoma del Estado de México. Actualmente es consultor en Servicios de Consultoría S.C. y asesor en Evaluación Social y Estudios Económicos S.C.