

# Un modelo de migración humana: experimentos numéricos basados sobre los datos de las tres ciudades laguneras<sup>a</sup>

**Vyacheslav Kalashnikov<sup>b</sup>**  
**Nataliya Kalashnykova<sup>c</sup>**  
**Ramón Luévanos Rojas<sup>d</sup>**  
**Mario Méndez Muños<sup>e</sup>**  
**César Uranga<sup>f</sup>**  
**Arnulfo Luévanos Rojas<sup>g</sup>**

*Se aplica un modelo de migración humana al estudio de crecimiento de población en las tres ciudades aglomeradas en la región Lagunera de México. Se introducen tres tipos de funciones de utilidad para distintos grupos de población, y se investiga un equilibrio con variaciones conjeturales. Los experimentos numéricos basados en datos de las tres ciudades muestran la fuerte influencia de los coeficientes de variaciones conjeturales sobre la actividad migratoria esperada.*

Palabras clave: modelo de migración humana, equilibrio con variaciones conjeturales.

## A Model of Human Migration: Numerical Experiments Based on the Data of Three Lake Cities

*We extend a human migration model and apply it to study the growth of population in three agglomerated cities in the Laguna region in Mexico. Three different types of utility*

<sup>a</sup> La actividad de la investigación de los primeros dos autores fue apoyada financieramente por el Paicyt proyecto CA1252-06 a la UANL, y por el SEP-Conacyt proyecto SEP-2004-C01-45786. El trabajo de los últimos cuatro autores fue organizado y apoyado por el Programa Académico (Cuerpo Académico) de la Facultad de Ingeniería Civil y Arquitectura (FICA) de la Universidad Juárez del Estado Durango (UJED).

<sup>b</sup> Ingeniería Industrial y de Sistemas, Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey, Correo electrónico: kalash@itesm.mx.

<sup>c</sup> Doctorado de Matemáticas Aplicadas, FCFM, UANL. Correo electrónico: nkalash@fcfm.uanl.mx.

<sup>d</sup> Facultad de Ingeniería Civil y Arquitectura (FICA), UJED. Correo electrónico: luera\_2000@yahoo.com.

<sup>e</sup> Facultad de Ingeniería Civil y Arquitectura (FICA), UJED. Correo electrónico: mmendez@att.net.com.

<sup>f</sup> Facultad de Ingeniería Civil y Arquitectura (FICA), UJED. Correo electrónico: armando.uranga@cna.gob.mx.

<sup>g</sup> Facultad de Ingeniería Civil y Arquitectura (FICA), UJED. Correo electrónico: arnulfo\_2006@hotmail.com.

*functions for various groups of population are proposed, and a conjectural variations equilibrium is investigated. Numerical experiments demonstrate the strong influence of conjectural coefficients upon the expected migration activity.*

Keywords: human migration model, conjectural variations equilibrium.

## Introducción

Los modelos de migración humana despertaron gran interés entre los investigadores de operaciones en los años noventa del siglo pasado (véase Nagurney, 1990: 79-88; Nagurney *et al.*, 1992: 262-274 y Nagurney, 1999, entre otros). La mayoría de los artículos y libros al respecto desarrollan condiciones que garantizan la existencia y unicidad de equilibrio en los modelos propuestos. Por ejemplo, los trabajos del grupo de Anna Nagurney examinan las diversas formas del equilibrio de Nash conforme a una suposición de competencia perfecta, es decir, cada grupo de la población descuida la posible influencia de la migración sobre el nivel de vida en el lugar de destino.

En los trabajos realizados por Bulavsky y Kalashnikov (1994: 129-138; 1995: 164-176) e Isac, Bulavsky y Kalashnikov (2002) y Figuières *et al.*, (2004) se introdujo una nueva gama de equilibrios con variaciones conjeturales (CVE) y se investigó que los coeficientes de influencia de cada agente afectaban la estructura del equilibrio de Nash. En particular se conjeturaron unos factores de influencia constantes en el modelo de migración humano examinado por Isac, Bulavsky y Kalashnikov (2002). Más precisamente, los grupos de migración potenciales no sólo estaban teniendo en cuenta la diferencia actual entre los valores de función de utilidad al destino y en la localización original, sino también las posibles variaciones en los valores de utilidad implicados en el cambio de volumen de la población debido al flujo de migración. Entonces, se consideraba que no había competencia perfecta sino un modelo del equilibrio generalizado de tipo Cournot con coeficientes de influencia diferentes de 1, en contraste con el equilibrio clásico de Cournot en que los coeficientes son iguales a 1.

En este trabajo extendemos al último modelo el caso en que los coeficientes de las variaciones conjeturales no sólo pueden ser constantes, sino también unas funciones (continuamente diferenciables) de la población total al destino y del fragmento del grupo en él. Es

más, permitimos estas funciones para tomar valores distintos a la localidad abandonada y al destino. Como una comprobación experimental del modelo propuesto, proponemos una forma específica de éste basado en datos relevantes de la población de las tres ciudades aglomeradas al límite de dos estados mexicanos: Durango y Coahuila. Consideramos la dinámica de crecimiento de la población 1980-2000 en las tres ciudades: Torreón (Coah.), Gómez Palacio (Dgo.) y Lerdo (Dgo.) y deducimos experimentalmente las funciones de utilidad para cada una de ellas. Tras reunir información sobre los costos promedio de movimiento y transporte (es decir, migración) para cada par de ciudades aplicamos el modelo de migración humana. Se realizaron experimentos numéricos con resultados interesantes acerca de los probables estados de equilibrio revelados.

El artículo está organizado como sigue: en la sección 1 se describe el modelo de migración humana examinado y se introduce la anotación apropiada. La sección 2 se dedica a la definición del equilibrio con las variaciones conjeturales en el modelo en cuestión. En la sección 3 presentamos algunos resultados respecto a la existencia y unicidad del equilibrio en cuestión. En la sección 4 se consideran varios ejemplos numéricos de equilibrio determinados para el modelo de migración humana sobre las tres localidades mencionadas. En la sección 5 se presenta la conclusión.

## El modelo

De manera similar a la empleada por Isac, Bulavsky y Kalashnikov (2002) se considera una economía cerrada con:

$n$  localizaciones, denotadas por  $i$ ,

$J$  clases de población, denotadas por  $k$ ,

$\overline{Q}_i^k$  población fija inicial de la clase  $k$  en la localidad  $i$

$Q_i^k$  población de la clase  $k$  en la localidad  $i$  en el equilibrio

$c_{ij}$  costo de migración de la localidad  $i$  a la localidad  $j$

$s_{ij}^k$  flujo de migración de la clase  $k$  del origen  $i$  al destino  $j$

Se supone que el costo de la migración no sólo refleja el costo del movimiento físico sino también el costo personal y psicológico que pagan quienes se mueven entre las localidades.

Al contrario del modelo de migración humana descrito por Isac, Bulavsky y Kalashnikov (2002), el valor  $u_i^k$  de la utilidad (lo atractivo de la localidad  $i$  percibido por la clase  $k$ ) depende de la población al destino  $Q_i^k$ , es decir,  $u = u(Q)$ .

Las ecuaciones de conservación de flujo para cada clase  $k$  y cada localidad  $i$  se dan como sigue:

$$Q_i^k = \bar{Q}_i^k + \sum_{l=i} s_{li}^k - \sum_{l \neq i} s_{il}^k, \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, J, \quad [1.1]$$

y la suposición de que no haya ninguna migración repetida se escribe como las desigualdades

$$\sum_{l \neq i} s_{il}^k \leq \bar{Q}_i^k, \quad i = 1, \dots, n, \quad [1.2]$$

con  $s_{il}^k \geq 0, \forall k = 1, \dots, J; l \neq i$ . Denote el conjunto factible del problema por

$$K = \{(Q, s) \mid s \geq 0, \text{ y } (Q, s) \text{ satisfacen a [1.1], [1.2]}\}$$

En la ecuación [1.1] la población a la localidad  $i$  de la clase  $k$  está determinada por la población inicial de la clase  $k$  en la localidad  $i$  más el flujo de migración en  $i$  de esa clase menos el flujo de migración fuera de  $i$  para esa clase. En la ecuación [1.2] el flujo fuera de  $i$  por la clase  $k$  no puede exceder la población inicial de la clase  $k$  a  $i$  si no se permite ninguna migración repetida.

Supóngase que los emigrantes potenciales son racionales y que esa migración continuará hasta que ningún individuo tenga incentivos para moverse, puesto que una decisión unilateral ya no rendirá una ganancia neta positiva (la ganancia en la utilidad esperada menos el costo de migración).

Además, al modelo de migración humana de Isac, Bulavsky y Kalashnikov (2002) le agregamos los conceptos siguientes.

Permita que  $w_{ij}^{k+} \geq 0$  sea un coeficiente de influencia tomado en cuenta por un individuo de la clase  $k$  que mueve de  $i$  a  $j$ . Este coeficiente es definido al asumir que después del movimiento de individuos en la cantidad  $s_{ij}^k$  de la clase  $k$  de la localidad  $i$  a la localidad  $j$ , la población total de la clase  $k$  a  $j$  será igual a:

$$\bar{Q}_j + w_{ij}^{k+} s_{ij}^k.$$

Por otro lado, permita que  $w_{ij}^{k-} \geq 0$  sea un coeficiente de influencia conjeturado por un individuo de la clase  $k$  que se mueve de la localidad  $i$  a la localidad  $j$ , determinado por la asunción de que después del movimiento de individuos en la cantidad  $s_{ij}^k$  la población total de la clase  $k$  en la localidad  $i$  permanecerá igual a

$$\bar{Q}_i - w_{ij}^{k-} s_{ij}^k.$$

Aceptamos las suposiciones siguientes acerca de las funciones de utilidad y las variaciones esperadas de los valores de utilidad:

**A1.** La utilidad  $u_i^k = u_i^k(Q_i^k)$  es una función continuamente diferenciable que disminuye en forma regular para todos  $i = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, J$ .

**A2.** Cada persona de la clase  $k$ , al considerar su posibilidad de mudarse de la localidad  $i$  a la localidad  $j$  no sólo tiene en cuenta la diferencia en el valor de utilidad de la localidad inicial y del destino, sino también el incremento esperado (negativo) del valor de la función de utilidad a  $j$

$$s_{ij}^k w_{ij}^{k+} \frac{du_j^k}{dQ_j^k}$$

y el incremento esperado (positivo) del valor de la utilidad en localidad  $i$

$$-s_{ij}^k w_{ij}^{k-} \frac{du_i^k}{dQ_i^k}$$

### La definición de un equilibrio

Un vector factible de las poblaciones y de los flujos  $(Q^*, s^*) \in K$  es un *equilibrio*, si para cada clase  $k = 1, \dots, J$ , y para cada par de localidades  $i, j = 1, \dots, n$ ;  $i \neq j$  se cumplen las relaciones siguientes:

$$u_i^k - s_{ij}^{k*} w_{ij}^{k-} \frac{du_i^k}{dQ_i^k} (Q_i^{k*}) + c_{ij}^k \begin{cases} = u_j^k + s_{ij}^{k*} w_{ij}^{k+} \frac{du_j^k}{dQ_j^k} (Q_j^{k*}) - \lambda_i^k, & \text{si } s_{ij}^{k*} > 0; \\ \geq u_j^k + s_{ij}^{k*} w_{ij}^{k+} \frac{du_j^k}{dQ_j^k} (Q_j^{k*}) - \lambda_i^k, & \text{si } s_{ij}^{k*} = 0; \end{cases} \quad [2.1]$$

y

$$\lambda_i^k \begin{cases} \geq 0, & \text{si } \sum_{j \neq i} s_{ij}^{k*} = \bar{Q}_i^k; \\ = 0, & \text{si } \sum_{j \neq i} s_{ij}^{k*} < \bar{Q}_i^k. \end{cases} \quad [2.2]$$

**A3.** Asumimos que los coeficientes de influencia son funciones que dependen de la población final de la localidad en cuestión (el destino para los coeficientes  $w_{ij}^{k+}$ , y la localidad inicial para los coeficientes  $w_{ij}^{k-}$ ) y del flujo de migración de la localidad  $i$  a la localidad  $j$ , satisfaciendo las condiciones siguientes:

$$s_{ij}^k w_{ij}^{k+} (Q_j^k, s_{ij}^k) = \alpha_{ij}^{k+} s_{ij}^k + \sigma_{ij}^{k+} Q_j^k$$

y

$$s_{ij}^k w_{ij}^{k-} (Q_i^k, s_{ij}^k) = \alpha_{ij}^{k-} s_{ij}^k + \sigma_{ij}^{k-} Q_i^k$$

donde

$$\alpha_{ij}^{k\pm} \geq 0, \quad \sigma_{ij}^{k\pm} \geq 0, \quad \alpha_{ij}^{k\pm} + \sigma_{ij}^{k\pm} \leq 1.$$

Conforme a la suposición A3, las condiciones [2.1] se reducen a:

$$u_i^k - s_{ij}^{k*} \alpha_{ij}^{k-} \frac{du_i^k}{dQ_i^k} - \sigma_{ij}^{k-} Q_i^k \frac{du_i^k}{dQ_i^k} + c_{ij}^k \begin{cases} = u_j^k + s_{ij}^{k*} \alpha_{ij}^{k+} \frac{du_j^k}{dQ_j^k} + \sigma_{ij}^{k-} \frac{du_j^k}{dQ_j^k} - \lambda_i^k, & \text{si } s_{ij}^{k*} > 0; \\ \geq u_j^k + s_{ij}^{k*} \alpha_{ij}^{k+} \frac{du_j^k}{dQ_j^k} + \sigma_{ij}^{k-} \frac{du_j^k}{dQ_j^k} - \lambda_i^k, & \text{si } s_{ij}^{k*} = 0. \end{cases} \quad [2.3]$$

Ahora supóngase que la función de utilidad asociada con una localidad particular y con una clase puede depender de la población de cada clase y en cada localidad, es decir, compóngase una función-vector  $u = u(Q)$ . También se supone que el costo asociado con la migración entre dos localidades percibido por una clase particular puede depender, en general, del flujo de cada clase entre cada par de localidades, es decir componga una función-vector  $c = c(s)$ . Finalmente, permítanos componer una función-vector auxiliar  $d(Q, s)$  del tamaño apropiado con los componentes siguientes:

$$d^k(Q, s) = \left( d_{ij}^k(Q, s) \right)_{i,j=1;i \neq j}^n, \quad k = 1, \dots, J,$$

donde

$$d_{ij}^k(Q, s) = s_{ij}^{k-} \alpha_{ij}^{k-} \frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k} + \sigma_{ij}^{k-} Q_i^k \frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k} + s_{ij}^{k+} \alpha_{ij}^{k+} \frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k} + \sigma_{ij}^{k+} Q_j^k \frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k}.$$

### La existencia y unicidad del equilibrio

Ahora estamos en la posibilidad de formular el resultado siguiente.

**Teorema 3.1** (Kalashnikov y Kalashnykova, 2006). *Un patrón de poblaciones y flujos de migración  $(Q^*, s^*) \in K$  satisface las condiciones de equilibrio [2.1] y [2.2] si, y solamente si él mismo resuelve el siguiente problema de desigualdad variacional:*

$$\langle -u(Q^*), Q - Q^* \rangle + \langle c(s^*) - d(Q^*, s^*), s - s^* \rangle \geq 0, \forall (Q, s) \in K. \quad [3.1]$$

La existencia de una solución de la desigualdad variacional [3.1] sigue la teoría general de tales desigualdades, bajo la única suposición de la diferenciabilidad continua de las funciones de utilidad  $u$  y la continuidad de las funciones del costo de migración  $c$ , porque el conjunto factible  $K$  es compacto y convexo (véase, por ejemplo, Kinderlehrer y Stampacchia, 1980).

La unicidad del patrón de las poblaciones y flujos migratorios en equilibrio  $(Q^*, s^*)$  puede ser deducida al suponer que el operador compuesto

$$\left( \begin{array}{c} -u(Q) \\ c(s) - d(Q, s) \end{array} \right) : R^{J \times n} \times R^{J \times n \times (n-1)} \rightarrow R^{J \times n} \times R^{J \times n \times (n-1)},$$

sea estrictamente monótono sobre el conjunto factible  $K$ , es decir:

$$\left\langle \begin{pmatrix} -u(Q^1) \\ c(s^1) - d(Q^1, s^1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -u(Q^2) \\ c(s^2) - d(Q^2, s^2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q^1 - Q^2 \\ s^1 - s^2 \end{pmatrix} \right\rangle > 0, \quad \forall \begin{pmatrix} Q^1 \\ s^1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} Q^2 \\ s^2 \end{pmatrix},$$

o sea,

$$-\langle u(Q^1) - u(Q^2), Q^1 - Q^2 \rangle + \langle c(s^1) - c(s^2), s^1 - s^2 \rangle - \langle d(Q^1, s^1) - d(Q^2, s^2), s^1 - s^2 \rangle > 0 \quad [3.2]$$

Esto último es una consecuencia inmediata del siguiente resultado clásico de la teoría de desigualdades variacionales (véase, por ejemplo, Kinderlehrer y Stampacchia, 1980):

**Teorema 3.2.** *Considérese una desigualdad variacional: Hallar un  $y^* \in K \subset R^m$  tal que*

$$\langle F(y^*), y - y^* \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K. \quad [3.3]$$

*Si el operador  $F : R^m \rightarrow R^m$  es estrictamente monótono, o sea,*

$$\langle F(y^1) - F(y^2), y^1 - y^2 \rangle > 0, \quad \forall y^1 \neq y^2,$$

*entonces la desigualdad variacional [3.3] no puede tener más que una solución.*

Considérese una suposición adicional:

**A4.** Los coeficientes  $\sigma_{ij}^{k\pm}$  satisfacen a las siguientes condiciones:

$$\sigma_{ij}^{k-} = \sigma_{ji}^{k+} = \sigma_i^k, \quad i = 1, \dots, n; \quad j \neq i. \quad [3.4]$$

Cabe anotar que conforme a las suposiciones A3 – A4, se puede relajar la condición de monotonía [3.2] y reemplazarla por una condición un poco más general que demanda la monotonía estricta de las dos funciones siguientes:

$$T(Q) = -u(Q) - d_Q(Q) \text{ respecto a } Q,$$

y

$$G(Q, s) = c(s) - d_s(Q, s) \text{ respecto a } s, \text{ para todo valor fijo de } Q;$$



aquí,

$$(d_Q^k)_i = \sigma_i^k Q_i^k \frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k}, \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, J; \quad [3.5]$$

y

$$(d_s^k)_{ij} = s_j^k \alpha_{ij}^{k-} \frac{\partial u_i^k}{\partial Q_i^k} + s_j^k \alpha_{ij}^{k+} \frac{\partial u_j^k}{\partial Q_j^k}, \quad i, j = 1, \dots, n; i \neq j; \quad k = 1, \dots, J. \quad [3.6]$$

En la forma matemática se representan estas dos condiciones como sigue:

$$\begin{aligned} \langle T(Q^1) - T(Q^2), Q^1 - Q^2 \rangle &= -\langle u(Q^1) - u(Q^2), Q^1 - Q^2 \rangle - \\ \langle d_Q(Q^1) - d_Q(Q^2), Q^1 - Q^2 \rangle &> 0, \quad \forall Q^1 \neq Q^2; \end{aligned} \quad [3.7]$$

$$\begin{aligned} \langle G(Q, s^1) - G(Q, s^2), s^1 - s^2 \rangle &= \\ \langle c(s^1) - d_s(Q, s^1) - c(s^2) + d_s(Q, s^2), s^1 - s^2 \rangle &> 0, \quad [3.8] \\ \forall (Q, s^1), (Q, s^2) \in K, \quad s^1 \neq s^2. \end{aligned}$$

Primero vamos a establecer el siguiente resultado de equivalencia:

**Teorema 3.3.** *Bajo las suposiciones A1 – A4, un patrón de población y flujos de migración  $(Q^*, s^*) \in K$  satisface a las condiciones de equilibrio [2.2] y [2.3] si, y solamente si resuelve el problema de desigualdad variacional:*

$$\langle T(Q^*), Q - Q^* \rangle + \langle G(Q^*, s^*), s - s^* \rangle \geq 0, \quad \forall (Q, s) \in K. \quad [3.9]$$

*Demostración.* Se puede ver la demostración en el artículo de Kalashnikov et al., publicado en 2006.

Se dan condiciones de unicidad en el siguiente teorema (véase (Kalashnikov et al., 2006):

**Teorema 3.4.** *Si las condiciones [3.7] y [3.8] se cumplen y las funciones de utilidad  $u_i^k = u_i^k(Q)$  son lineales, o sea*

$$u_i^k(Q) = b_i^k + \sum_{j=1}^n a_j^k Q_j, \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, J, \quad [3.10]$$

*entonces el problema de desigualdad variacional [3.9] no puede tener más que una solución.*

*Demostración* (véase Kalashnikov et al., 2006).

*Nota 3.1.* En el caso de las funciones de utilidad generales (no necesariamente lineales) se puede garantizar que si la distribución de población equilibrada  $Q^*$  está determinada únicamente, lo mismo es válido para el patrón de flujos equilibrados  $s^*$  (véase Kalashnikov *et al.*, 2006).

### Los ejemplos de equilibrio en el modelo de migración humana aplicado a Torreón, Gómez Palacio y Lerdo

Para realizar experimentos numéricos con el modelo de migración humano antes dicho consideramos tres localidades distintas  $i=1,2$  y  $3$ , para una única clase  $k$ , con una población  $Q_i$ . Cada habitante percibe un valor de  $u_i$  de utilidad en cada localidad  $i$ , y el costo de ser movido de  $i$  a  $j$ , denotado por  $c_{ij}$ . Como base de nuestra investigación, seleccionamos tres ciudades reales: Torreón, Coahuila ( $i=1$ ), Gómez Palacio, Durango ( $i=2$ ), y Lerdo, Durango ( $i=3$ ). Estas tres ciudades forman un aglomerado con un transporte bien desarrollado y redes de comunicación. Para introducir funciones de utilidad para cada ciudad, hacemos uso del esquema siguiente.

Asumiendo que  $\frac{du(Q(t))}{dt} = a$ , llegamos a la fórmula:

$$\frac{du}{dQ} = \frac{a}{dQ/dt}. \quad [4.1]$$

La función  $Q(t)$ , que refleja el crecimiento de la población con el paso del tiempo, se obtiene aproximadamente en una de las formas siguientes.

Suponiendo que  $Q(t) = A + Bt$  (función lineal) y haciendo uso de [4.1] con  $a = -1$ , llegamos a la ecuación diferencial que sigue:

$$\frac{du}{dQ} = -\frac{1}{B}. \quad [4.2]$$

Su solución general permite  $u(Q) = C - \frac{Q}{B}$  aceptar tal utilidad lineal para cada una de las tres ciudades mencionadas. Como valor del parámetro  $C$ , seleccionamos el costo promedio (en decenas de miles de pesos mexicanos) de una casa con dos dormitorios ubicada en la localidad correspondiente, aceptando que el valor del parámetro  $B$

esté determinado para cada ciudad por el procedimiento de los mínimos cuadrados aplicado a los datos de crecimiento de la población durante el periodo 1980-2000. Basados en estos cálculos, proponemos las siguientes funciones de utilidad para los experimentos numéricos:

$$\begin{cases} u_1(Q) = 25.0 - \frac{Q}{8635.4337}; \\ u_2(Q) = 22.5 - \frac{Q}{4795.51}; \\ u_3(Q) = 16.0 - \frac{Q}{2015.295}. \end{cases} \quad [4.3]$$

Supóngase que la población inicial de obreros de la construcción (el grupo 1, y el único en nuestros ejemplos numéricos) junto con sus familias sea en cada localidad:  $\bar{Q}_1 = 105000$ ,  $\bar{Q}_2 = 55000$ ,  $\bar{Q}_3 = 23000$ ; los costos de movimiento de una localidad a otra (en miles de pesos mexicanos) serán:  $c_{12} = 1.6$ ;  $c_{13} = 1.6$ ;  $c_{21} = 1.6$ ;  $c_{23} = 1.0$ ;  $c_{31} = 1.6$ ;  $c_{32} = 1.0$ ;

Las condiciones de equilibrio [2.1] y [2.2] pueden reescribirse como los problemas de complementariedad siguientes:

$$\begin{cases} \psi_{ij} \equiv u_i + c_{ij} - u_j - s_{ij} w_{ij}^- \frac{du_i}{dQ_i} - s_{ij} w_{ij}^+ \frac{du_i}{dQ_j} + \lambda_i \geq 0, & s_{ij} \geq 0, \text{ y } \psi_{ij} s_{ij} = 0; \\ \zeta_i \equiv \bar{Q}_i - \sum_{\ell \neq i} s_{i\ell} \geq 0, & \lambda_i \geq 0, \text{ y } \zeta_i \lambda_i = 0. \end{cases} \quad [4.9]$$

*Ejemplo 4.1.* Recordemos que para cada ciudad usamos la función de utilidad definida por [4.3]:

$$\begin{aligned} u_1(Q) &= 25.0 - \frac{Q}{8635.4337}; \\ u_2(Q) &= 22.5 - \frac{Q}{4795.51}; \\ u_3(Q) &= 16.0 - \frac{Q}{2015.295}. \end{aligned}$$

Considerando  $w_{ij}^- = 0.0$  y  $w_{ij}^+ \geq 0.0$ , escribimos el problema [4.9] en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
\psi_{12} &= 2.66 - \frac{Q_1}{8635.4337} + \frac{Q_2}{4795.51} + s_{12}w_{12}^+ \frac{1}{4795.51} + \lambda_1 \geq 0, & s_{12} &\geq 0, & \psi_{12} \cdot s_{12} &= 0; \\
\psi_{13} &= 9.16 - \frac{Q_1}{8635.4337} + \frac{Q_3}{2015.295} + s_{13}w_{13}^+ \frac{1}{2015.295} + \lambda_1 \geq 0, & s_{13} &\geq 0, & \psi_{13} \cdot s_{13} &= 0; \\
\psi_{21} &= -2.34 + \frac{Q_1}{8635.4337} - \frac{Q_2}{4795.51} + s_{21}w_{21}^+ \frac{1}{8635.4337} + \lambda_2 \geq 0, & s_{21} &\geq 0, & \psi_{21} \cdot s_{21} &= 0; \\
\psi_{23} &= 6.66 - \frac{Q_2}{4795.51} + \frac{Q_3}{2015.295} + s_{23}w_{23}^+ \frac{1}{2015.295} + \lambda_2 \geq 0, & s_{23} &\geq 0, & \psi_{23} \cdot s_{23} &= 0; \\
\psi_{31} &= -8.6 + \frac{Q_1}{8635.4337} - \frac{Q_3}{2015.295} + s_{31}w_{31}^+ \frac{1}{8635.4337} + \lambda_3 \geq 0, & s_{31} &\geq 0, & \psi_{31} \cdot s_{31} &= 0; \\
\psi_{32} &= -6.4 + \frac{Q_2}{4795.51} - \frac{Q_3}{2015.295} + s_{32}w_{32}^+ \frac{1}{4795.51} + \lambda_3 \geq 0, & s_{32} &\geq 0, & \psi_{32} \cdot s_{32} &= 0;
\end{aligned}
\tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &\geq 0, & \zeta_1 &\equiv 105000 - s_{12} - s_{13} \geq 0, & \lambda_1 \cdot \zeta_1 &= 0; \\
\lambda_2 &\geq 0, & \zeta_2 &\equiv 55000 - s_{21} - s_{23} \geq 0, & \lambda_2 \cdot \zeta_2 &= 0; \\
\lambda_3 &\geq 0, & \zeta_3 &\equiv 23000 - s_{31} - s_{32} \geq 0, & \lambda_3 \cdot \zeta_3 &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.11}$$

Para resolver el problema [4.10] – [4.11] suponemos que la población final de cada localidad al alcanzar el equilibrio es dado por la población total inicial de la localidad  $i$  menos el flujo de migración fuera de  $i$ , más el flujo de migración en  $i$ :

$$Q_1 = 529512 - s_{12} - s_{13} + s_{21} + s_{31};$$

$$Q_2 = 273315 - s_{21} - s_{23} + s_{12} + s_{32};$$

$$Q_3 = 112435 - s_{31} - s_{32} + s_{13} + s_{23}.$$

Al aceptar la forma general de los coeficientes de influencia como

$$w_{ij}^+(Q_j, s_{ij}) = \alpha_{ij}^+ + \sigma_{ij}^+ \frac{Q_j}{s_{ij}},$$

llegamos a  $\sigma_{ij}^k = 0$ ,  $w^+ = w_{12}^+ = w_{13}^+ = w_{21}^+ = w_{23}^+ = w_{31}^+ = w_{32}^+$ . Resolviendo el problema de complementariedad anterior para varios valores de  $\alpha_{ij}^+ = w^+ = 1$ ;  $\alpha_{ij}^+ = w^+ = 1.2$ ;  $\alpha_{ij}^+ = w^+ = 1.5$ ;  $\alpha_{ij}^+ = w^+ = 2$ ;  $\alpha_{ij}^+ = w^+ = 2.3$ ; y  $\alpha_{ij}^+ = w^+ = 2.5$  obtenemos resultados diferentes. Por ejemplo, si consideramos el caso del equilibrio de Cournot, esto es, con  $w_{ij}^- = w_{ij}^+ \equiv 0$ , y usamos el *software* Maple 10, encontramos la solución:

$$s_{12} = 483, s_{13} = s_{23} = 0; s_{21} = 0; s_{31} = 0, s_{32} = 7231;$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0,$$

El flujo insignificante  $s_{12} = 483$  demuestra que para la mayoría de personas que habita en Torreón, la ganancia en el valor de utilidad en las otras ciudades no compensa los costos de migración: sólo 483 trabajadores migratorios se mueven de Torreón a Gómez Palacio; sin embargo casi un tercio del total de los obreros de la construcción deja Lerdo para ir a Gómez Palacio, y se incrementa la población del grupo en Gómez Palacio a 62 714 personas y se disminuye en Lerdo a menos de 15 769 personas, es decir

$$\bar{Q}_1 = 104517, \bar{Q}_2 = 62714, \bar{Q}_3 = 15769$$

con la población total en Torreón igual a  $Q_1 = 529512 - 483 = 529029$ ; en Gómez Palacio  $Q_2 = 273315 + 483 + 7231 = 281029$  y en Lerdo  $Q_3 = 112435 - 7231 = 105204$ .

En otro caso, cuando  $w_{ij}^- = 0, w_{ij}^+ = 0.25$ , la solución cambia:

$$s_{12} = 730, s_{13} = s_{23} = 0; s_{21} = 0; s_{31} = 0, s_{32} = 6665;$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0.$$

En forma similar, si  $w_{ij}^- = 0, w_{ij}^+ = 0.50$ ,

$$s_{12} = 1168, s_{13} = s_{23} = 0; s_{21} = 0; s_{31} = 463, s_{32} = 5839;$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0.$$

Cuando  $w_{ij}^- = 0, w_{ij}^+ = 0.75$ , llegamos al resultado siguiente:

$$s_{12} = 1525, s_{13} = s_{23} = 0; s_{21} = 0; s_{31} = 1059, s_{32} = 5055;$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0.$$

Luego, si asignamos  $w_{ij}^- = 0, w_{ij}^+ = 1.0$ , llegamos a una solución diferente del problema [4.10] - [4.11]:

$$s_{12} = 1625, \quad s_{13} = 0, \quad s_{21} = 0, \quad s_{23} = 0, \quad s_{31} = 1355, \quad s_{32} = 4584;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0.$$

Analizando los resultados anteriores vemos que el flujo de migración de Torreón a Gómez Palacio, así como de Lerdo a Gómez Palacio, crece junto con el valor del coeficiente de influencia  $w_{ij}^+$ , mientras que el flujo de Lerdo a Torreón disminuye. El flujo de migración global de Lerdo también baja. Todos estos resultados se deben a que los trabajadores migratorios potenciales son menos precavidos al moverse a Gómez Palacio, cuya población total es inferior a la de Torreón.

Si continuamos aumentando el valor de coeficiente de influencia  $w_{ij}^+$ , obtenemos los resultados siguientes:

(i) para  $w_{ij}^- = 0, w_{ij}^+ = 1.2$ , llegamos a:

$$s_{12} = 1636, \quad s_{13} = 0, \quad s_{21} = 0, \quad s_{23} = 0, \quad s_{31} = 1498, \quad s_{32} = 4307;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0;$$

(ii) si  $w_{ij}^- = 0, w_{ij}^+ = 1.5$ , llegamos a:

$$s_{12} = 1606, \quad s_{13} = 0, \quad s_{21} = 0, \quad s_{23} = 0, \quad s_{31} = 1631, \quad s_{32} = 3983;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0;$$

(iii) cuando  $w_{ij}^- = 0, w_{ij}^+ = 2.0$ , los rendimientos del experimento:

$$s_{12} = 1510, \quad s_{13} = 0, \quad s_{21} = 0, \quad s_{23} = 0, \quad s_{31} = 1743, \quad s_{32} = 3581;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0;$$

(iv) para  $w_{ij}^- = 0, w_{ij}^+ = 2.3$ , el resultado obtenido es:

$$s_{12} = 1446, \quad s_{13} = 0, \quad s_{21} = 0, \quad s_{23} = 0, \quad s_{31} = 1773, \quad s_{32} = 3390;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0;$$

(v) por fin, si asignamos que  $w_{ij}^- = 0, w_{ij}^+ = 2.5$ , llegamos a la siguiente solución del problema [4.10] – [4.11]:

$$s_{12} = 1404, \quad s_{13} = 0, \quad s_{21} = 0, \quad s_{23} = 0, \quad s_{31} = 1784, \quad s_{32} = 3278;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0.$$

Es interesante notar primeramente que el flujo de Torreón continúa siendo creciente hasta que  $w_{ij}^- = 0, w_{ij}^+ = 1.2$ . Este aumento puede ser explicado por el hecho de que los trabajadores migratorios potenciales de Torreón esperan la disminución en el flujo de migración de Lerdo a Gómez Palacio; después, cuando el valor del coeficiente de influencia excede 1.2, el flujo de salidas en cuestión disminuye. Por supuesto que esto puede ser explicado por las precauciones que toman los grupos migratorios potenciales cuando se percatan del rápido crecimiento de la migración a su destino. Cabe advertir que ahora el flujo de Lerdo, aunque menos intensivo (5 062 contra 7 231) se divide en una proporción aproximada de 1:2 entre Torreón y Gómez Palacio.

Ahora, si asumimos que  $w_{ij}^- = 1.0, w_{ij}^+ = 1.0$  (entonces, los coeficientes de influencia  $w_{ij}^-$  no son cero), nosotros tenemos que sustituir la parte [4.10] por un problema de complementariedad más complejo:

$$\begin{aligned}
 \psi_{12} &= 2.66 - \frac{Q_1 - s_{12}w_{12}^-}{8635.4337} + \frac{Q_2 + s_{12}w_{12}^+}{4795.51} + \lambda_1 \geq 0, & s_{12} &\geq 0, & \psi_{12} \cdot s_{12} &= 0; \\
 \psi_{13} &= 9.16 - \frac{Q_1 - s_{13}w_{13}^-}{8635.4337} + \frac{Q_3 + s_{13}w_{13}^+}{2015.295} + \lambda_1 \geq 0, & s_{13} &\geq 0, & \psi_{13} \cdot s_{13} &= 0; \\
 \psi_{21} &= -2.34 + \frac{Q_1 + s_{21}w_{21}^+}{8635.4337} - \frac{Q_2 - s_{21}w_{21}^-}{4795.51} + \lambda_2 \geq 0, & s_{21} &\geq 0, & \psi_{21} \cdot s_{21} &= 0; \\
 \psi_{23} &= 6.66 - \frac{Q_2 - s_{23}w_{23}^-}{4795.51} + \frac{Q_3 + s_{23}w_{23}^+}{2015.295} + \lambda_2 \geq 0, & s_{23} &\geq 0, & \psi_{23} \cdot s_{23} &= 0; \\
 \psi_{31} &= -8.6 + \frac{Q_1 + s_{31}w_{31}^+}{8635.4337} - \frac{Q_3 - s_{31}w_{31}^-}{2015.295} + \lambda_3 \geq 0, & s_{31} &\geq 0, & \psi_{31} \cdot s_{31} &= 0; \\
 \psi_{32} &= -6.4 + \frac{Q_2 + s_{32}w_{32}^+}{4795.51} - \frac{Q_3 - s_{32}w_{32}^-}{2015.295} + \lambda_3 \geq 0, & s_{32} &\geq 0, & \psi_{32} \cdot s_{32} &= 0.
 \end{aligned}$$

[4.12]

La solución del problema [4.11] – [4.12] se da por debajo:

$$\begin{aligned}
 s_{12} &= 1918, & s_{13} &= 0, & s_{21} &= 62, & s_{23} &= 0, & s_{31} &= 1530, & s_{32} &= 2865; \\
 \lambda_1 &= \lambda_2 = 0, & \lambda_3 &= 0.
 \end{aligned}$$

Finalmente, para el caso de  $w_{ij}^- = 2.0, w_{ij}^+ = 2.0$  obtenemos la siguiente solución del problema [4.11] – [4.12]:

$$\begin{aligned}
 s_{12} &= 1419, & s_{13} &= s_{23} = 0; & s_{21} &= 0; & s_{31} &= 1213, & s_{32} &= 2033; \\
 \lambda_1 &= 0, & \lambda_2 &= 0, & \lambda_3 &= 0.
 \end{aligned}$$

Comparando el primer resultado con el caso de  $w_{ij}^- = 0, w_{ij}^+ = 1.0$ , concluimos que el flujo de migración total de la ciudad más pequeña (Lerdo) disminuye, mientras que el flujo de la ciudad más grande (Torreón) crece. Esto puede ser consecuencia de que una parte de los trabajadores migratorios potenciales de Lerdo está renuente a dejar su ciudad; si suponemos que la población de Lerdo pudiera estar disminuyendo, aumentaría rápidamente el valor de la utilidad de la gente que se queda en Lerdo. Teniendo eso en cuenta, los trabajadores migratorios potenciales de Torreón pueden preferir moverse a Gómez Palacio. Ambas explicaciones están en línea con la teoría de equilibrio de variaciones conjetural.

Mientras tanto, si los coeficientes  $w_{ij}^-$  aumentan hasta 2.0, esto puede demorar la decisión de muchos profesionales de Torreón respecto a cambiar su lugar, ya que estimarían que sus posibilidades de mejorar su posición en Torreón son altas si presuponen que el flujo fuera de la ciudad es bastante grande.

Al acumular todos los resultados de los experimentos descritos obtenemos las siguientes tablas y gráficas. Es fácil ver que la influencia de los coeficientes  $w_{ij}^+$  y  $w_{ij}^-$  sobre los valores de flujos de migración es más evidente que sobre las cantidades de miembros del grupo de trabajadores de la construcción y sobre los valores de la población total en las tres ciudades en cuestión. Esto se explica por el hecho de que los valores de flujos de migración en este ejemplo son pequeños respecto a las poblaciones enteras de las ciudades examinadas.

Las gráficas de los flujos no ceros (solamente de los flujos  $s_{12}$ ,  $s_{31}$  y  $s_{32}$ ) aparecen en la figura 4.2.

En forma similar, para varios valores de los coeficientes de influencia  $w_{ij}^+$  y  $w_{ij}^-$ , graficamos los valores de poblaciones de equilibrio del grupo de los obreros de la construcción en cada ciudad (es decir, los valores de  $\bar{Q}_1^*$ ,  $\bar{Q}_2^*$  y  $\bar{Q}_3^*$ , calculados con las siguientes fórmulas):

$$\bar{Q}_1^* = 105000 - s_{12} - s_{13} + s_{21} + s_{31};$$

$$\bar{Q}_2^* = 55000 - s_{21} - s_{23} + s_{12} + s_{32};$$

$$\bar{Q}_3^* = 23000 - s_{31} - s_{32} + s_{13} + s_{23}.$$

Finalmente, las gráficas del cambio de poblaciones totales en el equilibrio para las tres ciudades, entonces, de los valores de  $Q_1^*$ ,  $Q_2^*$  y  $Q_3^*$ , dadas por las fórmulas



$$\begin{aligned} Q_1^* &= 529512 - s_{12} - s_{13} + s_{21} + s_{31}; \\ Q_2^* &= 273315 - s_{21} - s_{23} + s_{12} + s_{32}; \\ Q_3^* &= 112435 - s_{31} - s_{32} + s_{13} + s_{23}, \end{aligned}$$

se presentan en la próxima figura 4.4.

*Ejemplo 4.2.*

Ahora, al suponer que el crecimiento de la población en cada localidad está aproximada por una función exponencial  $Q(t) = A - Be^{-t}$ , al volver a utilizar [4.1] con  $a = -1$ , podemos deducir la siguiente ecuación diferencial. Como

$$\frac{dQ}{dt} = Be^{-t} = A - Q,$$

la función de utilidad  $u = u(Q)$  debe resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{du}{dQ} = -\frac{1}{A - Q},$$

la solución general de la cual es la función logarítmica

$$u(Q) = C + \log(A - Q). \quad [4.13]$$

De nuevo aplicando la técnica de los mínimos cuadrados para aproximar el crecimiento de la población durante los años 1980 a 2000 en Torreón, Gómez Palacio y Lerdo por la función exponencial, seleccionamos las siguientes funciones de utilidad logarítmicas para nuestros experimentos numéricos:

$$\begin{cases} u_1(Q) = 25.0 + \log(8.84343029 \cdot 10^7 - Q); \\ u_2(Q) = 22.5 + \log(4.848647552 \cdot 10^7 - Q); \\ u_3(Q) = 16.0 + \log(2.0247551 \cdot 10^7 - Q). \end{cases} \quad [4.14]$$

Considerando  $w_{ij}^- = 0.0$  y  $w_{ij}^+ \geq 0.0$ , podemos reescribir [4.2] en la forma del siguiente problema de complementariedad.

CUADRO 4.1

Flujos de migración obtenidos en el ejemplo 4.1 con varios coeficientes de influencia  $w_{ij}^{\pm}$

	$Q_1=105000$	$Q_2=529512$	$Q_3=273315$	$Q_4=112435$	$c_{12}=1.6$	$c_{31}=1.6$	$c_{32}=1.0$
	$Q_2=55000$	$Q_3=273315$	$Q_4=112435$		$c_{13}=1.6$	$c_{31}=1.6$	$c_{32}=1.0$
	$Q_3=23000$	$Q_4=112435$			$c_{21}=1.6$		
	$w^+=0.0$	$w^+=0.25$	$w^+=0.50$	$w^+=0.75$	$w^+=1.0$	$w^+=1.2$	
	$w^-=0.0$	$w^-=0.00$	$w^-=0.00$	$w^-=0.00$	$w^-=0.0$	$w^-=0.0$	$w^-=0.0$
$s_{12}$	483.0	730.0	1 168.0	1 525.0	1 625.0	1 636.0	
$s_{13}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$s_{21}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$s_{23}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$s_{31}$	0.0	0.0	463.0	1 059.0	1 355.0	1 498.0	
$s_{32}$	7 231.0	6 665.0	5 839.0	5 035.0	4 584.0	4 307.0	
$\lambda_1$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\lambda_2$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\lambda_3$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\bar{Q}_1$	104 517.0	104 270.0	104 295.0	104 534.0	104 730.0	104 862.0	
$\bar{Q}_2$	62 714.0	62 395.0	62 007.0	61 580.0	61 209.0	60 943.0	
$\bar{Q}_3$	15 769.0	16 335.0	16 698.0	16 886.0	17 061.0	17 195.0	
$Q_1^*$	529 029.0	528 782.0	528 807.0	529 046.0	529 242.0	529 374.0	
$Q_2^*$	281 029.0	280 710.0	280 322.0	279 895.0	279 524.0	279 258.0	
$Q_3^*$	105 204.0	105 770.0	106 133.0	106 321.0	106 496.0	106 630.0	

CUADRO 4.1  
(continuación)

	$Q_1=105000$	$Q_2=529512$	$c_{12}=1.6$	$c_{23}=1.0$	
	$Q_2=55000$	$Q_3=273315$	$c_{13}=1.6$	$c_{31}=1.6$	
	$Q_3=23000$	$Q_1=112435$	$c_{21}=1.6$	$c_{32}=1.0$	
	$w^*=1.5$	$w^*=2.0$	$w^*=2.5$	$w^*=2.0$	
	$w^*=0.0$	$w^*=0.0$	$w^*=0.0$	$w^*=2.0$	
$S_{12}$	1 606.0	1 510.0	1 446.0	1 918.0	1 419.0
$S_{13}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$S_{21}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$S_{23}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$S_{31}$	1 631.0	1 743.0	1 773.0	1 530.0	1 213.0
$S_{32}$	3 983.0	3 581.0	3 390.0	2 865.0	2 033.0
$\lambda_1$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\lambda_2$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\lambda_3$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\bar{Q}_1^*$	105 025.0	105 233.0	105 327.0	104 612.0	104 794.0
$\bar{Q}_2^*$	60 589.0	60 091.0	59 836.0	59 783.0	58 452.0
$\bar{Q}_3^*$	17 386.0	17 676.0	17 837.0	18 605.0	19 754.0
$Q_1^*$	529 537.0	529 745.0	529 839.0	529 124.0	529 306.0
$Q_2^*$	278 904.0	278 406.0	278 151.0	278 098.0	276 767.0
$Q_3^*$	106 821.0	107 111.0	107 272.0	108 040.0	109 189.0

FIGURA 4.2  
Gráficas de flujos de migración (no ceros) para varios valores de coeficientes de influencia

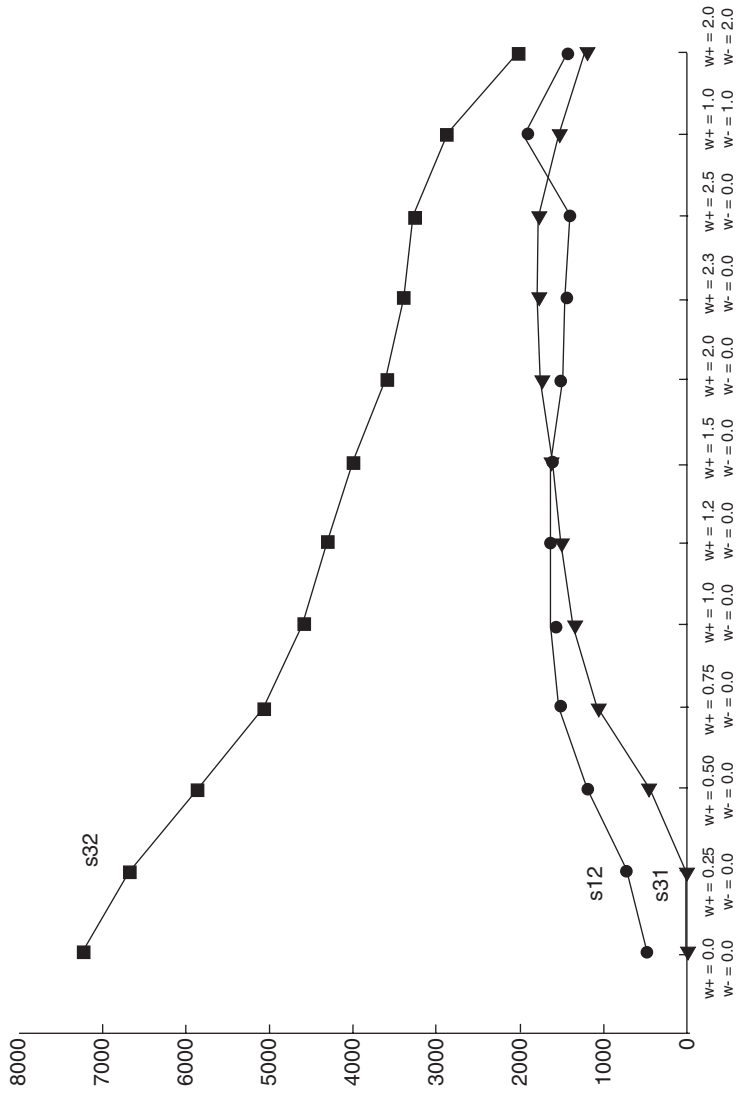


FIGURA 4.3  
 Gráficas de las cantidades de miembros del grupo migratorio en el equilibrio para varios valores de los coeficientes de influencia  $w_+$  y  $w_-$

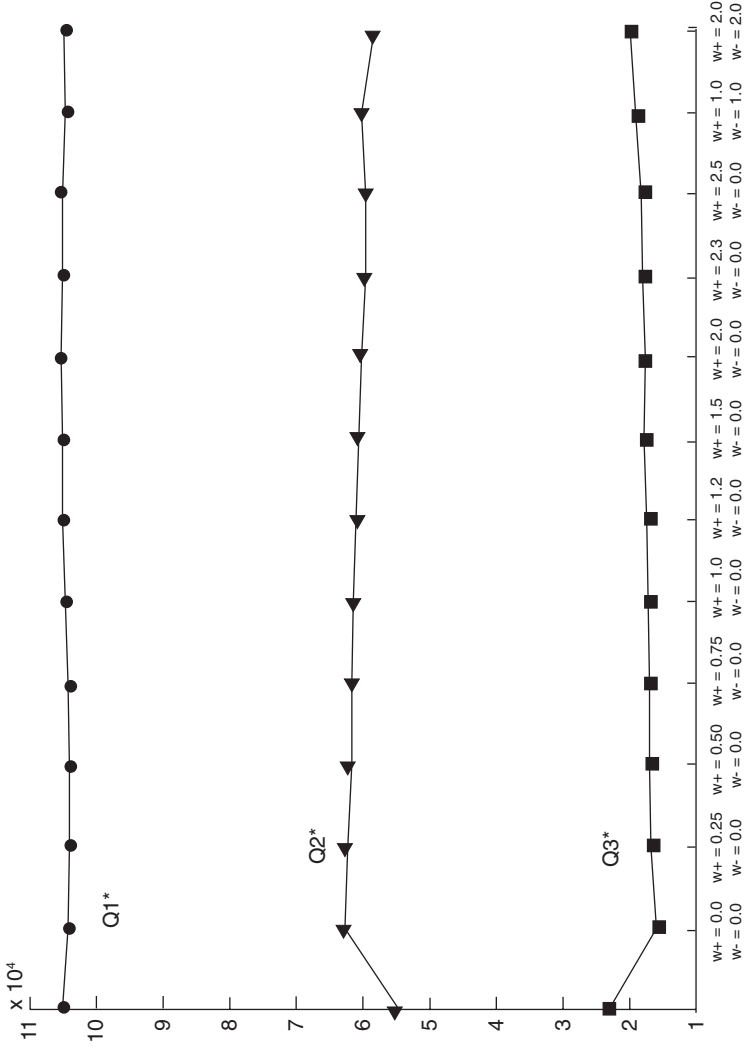
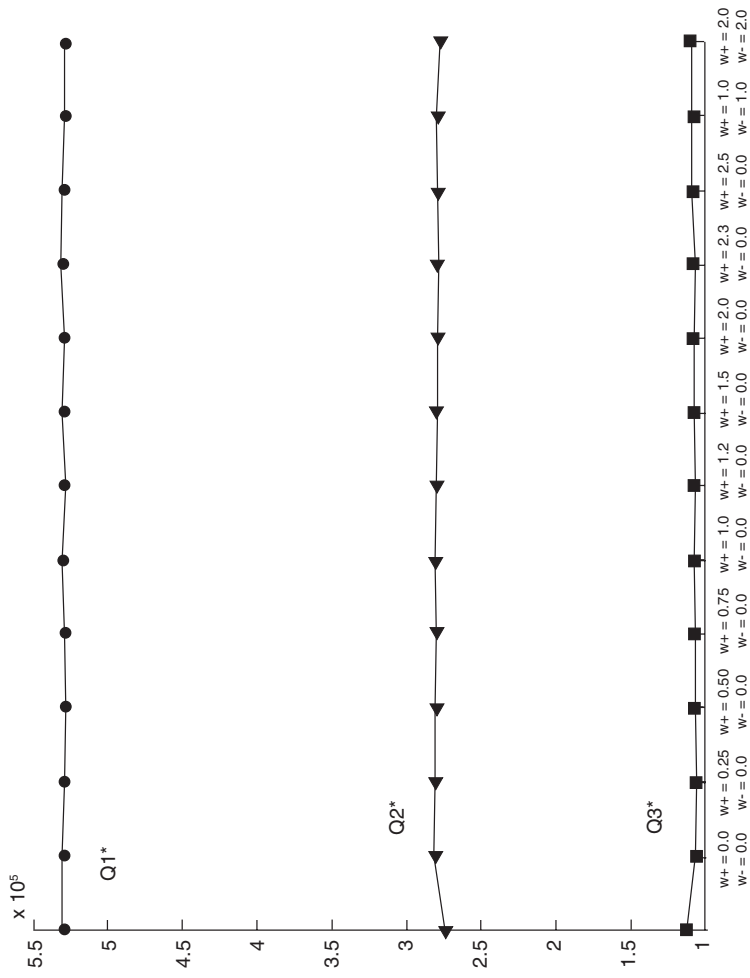


FIGURA 4.4  
 Gráficas de poblaciones totales de equilibrio en las tres ciudades para varios valores de los coeficientes de influencia  $w+$  y  $w-$



$$\begin{aligned}
 \psi_{12} &= 2.66 - \log(8.84 \cdot 10^7 - Q_1) + \log(4.85 \cdot 10^7 - Q_2) - \frac{s_{12} w_{12}^+}{4.85 \cdot 10^7 - Q_2} + \lambda_1 \geq 0, & s_{12} \geq 0, & \psi_{12} \cdot s_{12} = 0; \\
 \psi_{13} &= 9.16 - \log(8.84 \cdot 10^7 - Q_1) + \log(2.02 \cdot 10^7 - Q_3) - \frac{s_{13} w_{13}^+}{2.02 \cdot 10^7 - Q_3} + \lambda_1 \geq 0, & s_{13} \geq 0, & \psi_{13} \cdot s_{13} = 0; \\
 \psi_{21} &= -2.34 + \log(8.84 \cdot 10^7 - Q_1) - \log(4.85 \cdot 10^7 - Q_2) - \frac{s_{21} w_{21}^+}{8.84 \cdot 10^7 - Q_1} + \lambda_2 \geq 0, & s_{21} \geq 0, & \psi_{21} \cdot s_{21} = 0; \\
 \psi_{23} &= 6.66 - \log(4.85 \cdot 10^7 - Q_2) + \log(2.02 \cdot 10^7 - Q_3) - \frac{s_{23} w_{23}^+}{2.02 \cdot 10^7 - Q_3} + \lambda_2 \geq 0, & s_{23} \geq 0, & \psi_{23} \cdot s_{23} = 0; \\
 \psi_{31} &= -8.6 + \log(8.84 \cdot 10^7 - Q_1) - \log(2.02 \cdot 10^7 - Q_3) - \frac{s_{31} w_{31}^+}{8.84 \cdot 10^7 - Q_1} + \lambda_3 \geq 0, & s_{31} \geq 0, & \psi_{31} \cdot s_{31} = 0; \\
 \psi_{32} &= -6.4 + \log(4.85 \cdot 10^7 - Q_2) - \log(2.02 \cdot 10^7 - Q_3) - \frac{s_{32} w_{32}^+}{4.85 \cdot 10^7 - Q_2} + \lambda_3 \geq 0, & s_{32} \geq 0, & \psi_{32} \cdot s_{32} = 0;
 \end{aligned}$$

[4.15]

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 \geq 0, \quad \zeta_1 &\equiv 105000 - s_{12} - s_{13} \geq 0, \quad \lambda_1 \cdot \zeta_1 = 0; \\
 \lambda_2 \geq 0, \quad \zeta_2 &\equiv 55000 - s_{21} - s_{23} \geq 0, \quad \lambda_2 \cdot \zeta_2 = 0; \\
 \lambda_3 \geq 0, \quad \zeta_3 &\equiv 23000 - s_{31} - s_{32} \geq 0, \quad \lambda_3 \cdot \zeta_3 = 0.
 \end{aligned}$$

[4.16]

Para resolver el problema [4.15] – [4.16], recordamos que la población final en cada localidad en un equilibrio está dada por la población total inicial en la localidad  $i$  menos el flujo de migración de la localidad  $i$ , más el flujo de migración hacia  $i$ :

$$Q_1 = 529512 - s_{12} - s_{13} + s_{21} + s_{31};$$

$$Q_2 = 273315 - s_{21} - s_{23} + s_{12} + s_{32};$$

$$Q_3 = 112435 - s_{31} - s_{32} + s_{13} + s_{23}.$$

Suponiendo que

$$w_{ij}^+(Q, s) = \alpha_{ij}^+ + \sigma_{ij}^+ \frac{Q_j}{s_j},$$

aceptamos  $\sigma_{ij}^k = 0$ ,  $w^+ = w_{12}^+ = w_{13}^+ = w_{21}^+ = w_{23}^+ = w_{31}^+ = w_{32}^+$ . Después, al resolver el problema de complementariedad mencionado para varios valores de  $\alpha_{ij}^+ = w^+ = 1$ ;  $\alpha_{ij}^+ = w^+ = 1.2$ ;  $\alpha_{ij}^+ = w^+ = 1.5$ ;  $\alpha_{ij}^+ = w^+ = 2$ ;  $\alpha_{ij}^+ = w^+ = 22.3$  y  $\alpha_{ij}^+ = w^+ = 2.5$  obtenemos los resultados resumidos en el cuadro 4.2.

Por ejemplo, si consideramos el caso con  $w_{ij}^- = 0$ ,  $w_{ij}^+ = 0.1$  y utilizamos el *software* Maple 10, hallamos la siguiente solución:

CUADRO 4.2

Flujos de migración obtenidos en el ejemplo 4.2 para varios coeficientes de influencia  $w_{ij}^{\pm}$

	$\bar{Q}_1=105000$	$\bar{Q}_2=55000$	$\bar{Q}_3=23000$	$Q_1=529512$	$Q_2=273315$	$Q_3=112435$	$c_{12}=1.6$	$c_{13}=1.6$	$c_{21}=1.6$	$c_{23}=1.0$	$c_{31}=1.6$	$c_{32}=1.0$
$s_{12}$	$w^+=0.10$	$w^+=0.50$	$w^+=0.50$	$w^+=0.50$	$w^+=0.75$	$w^+=0.75$	$w^+=1.0$	$w^+=1.0$	$w^+=1.0$	$w^+=1.0$	$w^+=1.0$	$w^+=1.0$
$s_{13}$	$w^-=0.00$	$w^-=0.00$	$w^-=0.00$	$w^-=0.50$	$w^-=0.75$	$w^-=0.75$	$w^-=0.2$	$w^-=0.2$	$w^-=0.2$	$w^-=1.0$	$w^-=1.0$	$w^-=1.0$
$s_{21}$	26.0	63.0	77.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$s_{23}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$s_{31}$	21 856.0	22 460.0	19 148.0	19 148.0	16 639.0	16 639.0	19 948.0	19 948.0	15 301.0	15 301.0	15 301.0	15 301.0
$s_{32}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	169.0	169.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$s_{33}$	22 040.0	22 298.0	5 763.0	5 763.0	5 646.0	5 646.0	10 468.0	10 468.0	5 498.0	5 498.0	5 498.0	5 498.0
$\lambda_{31}$	960.0	702.0	4 728.0	4 728.0	4 117.0	4 117.0	3 774.0	3 774.0	3 962.0	3 962.0	3 962.0	3 962.0
$\lambda_{32}$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\lambda_{33}$	0.487	0.489	0.489	0.489	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\lambda_{34}$	9.87	9.99	9.99	9.99	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\bar{Q}_1^*$	148 870.0	149 695.0	129 834.0	129 834.0	127 285.0	127 285.0	135 416.0	135 416.0	125 799.0	125 799.0	125 799.0	125 799.0
$\bar{Q}_2^*$	34 130.0	33 305.0	40 657.0	40 657.0	42 478.0	42 478.0	386 579.0	386 579.0	43 661.0	43 661.0	43 661.0	43 661.0
$\bar{Q}_3^*$	0.0	0.0	12 509.0	12 509.0	13 237.0	13 237.0	8 927.0	8 927.0	13 540.0	13 540.0	13 540.0	13 540.0
$Q_1^*$	573 382.0	574 207.0	554 346.0	554 346.0	551 797.0	551 797.0	559 928.0	559 928.0	550 311.0	550 311.0	550 311.0	550 311.0
$Q_2^*$	252 452.0	251 620.0	258 972.0	258 972.0	260 793.0	260 793.0	256 972.0	256 972.0	261 976.0	261 976.0	261 976.0	261 976.0
$Q_3^*$	89 435.0	89 435.0	101 944.0	101 944.0	102 672.0	102 672.0	98 362.0	98 362.0	102 975.0	102 975.0	102 975.0	102 975.0





$$s_{12} = 26, \quad s_{13} = s_{23} = 0; \quad s_{21} = 21856; \quad s_{31} = 22040, \quad s_{32} = 960;$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 9.87.$$

El flujo insignificante  $s_{12} = 26$  demuestra que para la mayoría de los habitantes de Torreón, la ganancia en el valor de su utilidad no compensa sus gastos de migración: sólo 26 emigrantes se mueven de Torreón a Gómez Palacio; sin embargo casi todos los obreros de la construcción salen de Lerdo para ir a Torreón, y los restantes se mueven a Gómez Palacio. En su turno, casi la mitad del grupo total de albañiles de Gómez Palacio migra a Torreón, elevando junto con los emigrantes de Lerdo la cantidad de albañiles hasta alcanzar 148 870 personas, y reduciéndose este grupo en Gómez Palacio hasta 34 130 personas, por ejemplo:

$$\bar{Q}_1 = 148870, \quad \bar{Q}_2 = 34130, \quad \bar{Q}_3 = 0.$$

Ahora la población total en Torreón estará  $Q_1 = 529512 - 26 + 21856 + 22040 = 573382$  en Gómez Palacio  $Q_2 = 273315 + 26 - 21856 + 960 = 252452$  y en Lerdo  $Q_3 = 112435 - 23000 = 89435$ .

Al suponer que  $w_{ij}^- > 0$ , hay que reemplazar el subproblema [4.15] por otro un poco más complicado, el problema de complementariedad.

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_{12} \equiv 2.66 - \log(8.84 \cdot 10^7 - Q_1) + \log(4.85 \cdot 10^7 - Q_2) - \frac{s_{12} w_{12}^+}{4.85 \cdot 10^7 - Q_2} - \\ - \frac{s_{12} w_{12}^-}{8.84 \cdot 10^7 - Q_1} + \lambda_1 \geq 0, \quad s_{12} \geq 0, \quad \psi_{12} \cdot s_{12} = 0; \\ \psi_{13} \equiv 9.16 - \log(8.84 \cdot 10^7 - Q_1) + \log(2.02 \cdot 10^7 - Q_3) - \frac{s_{13} w_{12}^-}{8.84 \cdot 10^7 - Q_1} - \\ - \frac{s_{13} w_{13}^+}{2.02 \cdot 10^7 - Q_3} + \lambda_1 \geq 0, \quad s_{13} \geq 0, \quad \psi_{13} \cdot s_{13} = 0; \\ \psi_{21} \equiv -2.34 + \log(8.84 \cdot 10^7 - Q_1) - \log(4.85 \cdot 10^7 - Q_2) - \frac{s_{21} w_{21}^-}{4.85 \cdot 10^7 - Q_2} - \\ - \frac{s_{21} w_{21}^+}{8.84 \cdot 10^7 - Q_1} + \lambda_2 \geq 0, \quad s_{21} \geq 0, \quad \psi_{21} \cdot s_{21} = 0; \\ \psi_{23} \equiv 6.66 - \log(4.85 \cdot 10^7 - Q_2) + \log(2.02 \cdot 10^7 - Q_3) - \frac{s_{23} w_{23}^-}{4.85 \cdot 10^7 - Q_2} - \\ - \frac{s_{23} w_{23}^+}{2.02 \cdot 10^7 - Q_3} + \lambda_2 \geq 0, \quad s_{23} \geq 0, \quad \psi_{23} \cdot s_{23} = 0; \\ \psi_{31} \equiv -8.6 + \log(8.84 \cdot 10^7 - Q_1) - \log(2.02 \cdot 10^7 - Q_3) - \frac{s_{31} w_{31}^-}{2.02 \cdot 10^7 - Q_3} - \\ - \frac{s_{31} w_{31}^+}{8.84 \cdot 10^7 - Q_1} + \lambda_3 \geq 0, \quad s_{31} \geq 0, \quad \psi_{31} \cdot s_{31} = 0; \\ \psi_{32} \equiv -6.4 + \log(4.85 \cdot 10^7 - Q_2) - \log(2.02 \cdot 10^7 - Q_3) - \frac{s_{32} w_{32}^-}{2.02 \cdot 10^7 - Q_3} - \\ - \frac{s_{32} w_{32}^+}{4.85 \cdot 10^7 - Q_2} + \lambda_3 \geq 0, \quad s_{32} \geq 0, \quad \psi_{32} \cdot s_{32} = 0; \end{array} \right. \quad [4.17]$$

Comparando los resultados que aparecen en el cuadro 4.2 podemos concluir que cuando los coeficientes de influencia  $w_{ij}^- = 0$ , es decir, cuando los emigrantes potenciales no toman en cuenta los cambios posibles en la población de la localidad abandonada, entonces los niveles de flujos migratorios tanto de Gómez Palacio como de Lerdo son bastante altos (por ejemplo, todos los emigrantes potenciales del grupo considerado salen de Lerdo). No obstante, cuando estos valores son positivos:  $w_{ij}^- > 0$  los flujos migratorios de Lerdo y Gómez Palacio decrecen conforme aumentan los coeficientes de la influencia. Esto último puede ser explicado como consecuencia de que una parte de los emigrantes potenciales de Lerdo y Gómez Palacio no quieren salir de su lugar al suponer que la población de su ciudad podría decrecer y por tanto, el valor de la función de utilidad para este grupo de profesionales sería más alto.

## Conclusiones

Hemos investigado un modelo de migración humana que incluye ciertas conjeturas de los grupos de migración acerca de las variaciones de las funciones de utilidad tanto en la localidad que abandonan, como en el sitio de destino. Para formular condiciones de equilibrio en este modelo usamos el concepto de un equilibrio de la variación conjetural (CVE). Establecemos la existencia y la unicidad del equilibrio en cuestión, y comprendemos una serie de experimentos numéricos basados en los datos del crecimiento de la población y las funciones de utilidad especificados para una aglomeración de tres ciudades en la región de La Laguna de México. Los resultados de los experimentos muestran una fuerte dependencia de los flujos de migración respecto a las conjeturas de los grupos de trabajadores migratorios potenciales.

En este artículo utilizamos la relación [4.1] y la suposición de que las funciones de utilidad son de la forma lineal, lo que a través de [4.2] nos conduce a las fórmulas [4.3] para las funciones de utilidad deseadas. En los trabajos que desarrollaremos en el futuro aplicaremos otras suposiciones respecto a la forma de las dependencias de los valores de funciones de utilidad de los valores de población total en cada localidad. Particularmente proyectamos utilizar otras tres formas de las funciones en cuestión:

a) las funciones tangenciales del primer tipo:

$$\begin{cases} u_1(Q) = C_1 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( \frac{Q - A_1}{B_1} \right); \\ u_2(Q) = C_2 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( \frac{Q - A_2}{B_2} \right); \\ u_3(Q) = C_3 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left( \frac{Q - A_3}{B_3} \right); \end{cases}$$

b) y las funciones tangenciales del segundo tipo:

$$\begin{cases} u_1(Q) = C_1 - \operatorname{tg} \left( \frac{Q - A_1}{2B_1} \right); \\ u_2(Q) = C_2 - \operatorname{tg} \left( \frac{Q - A_2}{2B_2} \right); \\ u_3(Q) = C_3 - \operatorname{tg} \left( \frac{Q - A_3}{2B_3} \right). \end{cases}$$

En todos los casos mencionados los valores de los parámetros  $A_j$ ,  $B_j$ ,  $C_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , serán determinados como en el caso considerado en este artículo al resolver unos problemas de aproximación óptima de los datos reales del crecimiento de poblaciones en cada ciudad durante el periodo de 1980 a 2000. Después realizaremos experimentos numéricos con estas funciones de utilidad de la misma manera en que lo hicimos aquí.

Finalmente notamos que el modelo de migración humana con variaciones conjeturales puede extenderse más allá y podría examinarse en el caso en que la restricción [1.2] fuera reemplazada por una condición más débil, digamos

$$Q_i^k \geq 0. \quad [5.1]$$

Eso nos permite considerar una migración repetida (o encadenada). En este caso el conjunto  $K$  de los patrones de población y migración

factibles deja de ser compacto (sin embargo permanece convexo), lo que hace insuficiente el uso de la teoría general de problemas de desigualdad variacional para demostrar la existencia de equilibrio. Entonces los resultados más sutiles obtenidos por Bulavsky, Isac y Kalashnikov en 1998 (333-358) y desarrollados por Isac, Bulavsky y Kalashnikov en 2002 pueden ser usados para ese efecto. De hecho, se garantizará la existencia de equilibrio para las varias clases de funciones de utilidad y costos de migración que están libres de las familias excepcionales de elementos (FEE).

### Bibliografía

- Bulavsky, Vladimir, Gheorghe Isac y Vyacheslav Kalashnikov (1998), "Application of Topological Degree Theory to Complementarity Problems", en Athanasios Migadlas, Panos Pardalos y Peter Värbrand (coords.), *Multilevel Optimization: Algorithms and Applications*, Dordrecht-Boston-Londres, Kluwer Academic Publishers, pp. 333-358.
- Bulavsky, Vladimir y Vyacheslav Kalashnikov (1994), "One-parametric Driving Method to Study Equilibrium", *Economics and Mathematical Methods* [Ekonomika i Matematicheskie Metody], vol. 30, pp. 129-138.
- Bulavsky, Vladimir y Vyacheslav Kalashnikov (1995), "Equilibria in Generalized Cournot and Stackelberg Models", *Economics and Mathematical Methods* [Ekonomika i Matematicheskie Metody], vol. 35, pp. 164-176.
- Figuières, Charles, Alan Jean-Marie, Nicolas Quérou y Mabel Tidball (2004), *Theory of Conjectural Variation*, Nueva Jersey-Londres-Singapur-Shanghai-Hong Kong-Taípei-Bangalore, World Scientific.
- Isac, Gheorghe, Vladimir Bulavsky y Vyacheslav Kalashnikov (2002), *Complementarity, Equilibrium, Efficiency and Economics*, Dordrecht-Boston-Londres, Kluwer Academic Publishers.
- Kalashnikov, Vyacheslav y Nataliya Kalashnykova (2004), "Demand and Equilibrium in a Network of Oligopolistic Markets", *Journal of Business and Economics Research*, vol. 2, pp. 51-64.
- Kalashnikov, Vyacheslav y Nataliya Kalashnykova (2006), "Simulation of a Conjectural Variations Equilibrium in a Human Migration Model", *The International Journal of Simulation: Science, Systems and Technologies*, Nottingham, The UK Simulation Society.
- Kalashnikov, Vyacheslav, Nataliya Kalashnykova, Ramón Luévanos, Mario Méndez, César Uranga y Arnulfo Luévanos (2006), "Numerical Experimentation with a Human Migration Model", *The European Journal of Operational Research*.

- Kinderlehrer, D., y G. Stampacchia (1980), *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Nueva York, Academic Press.
- Nagurney, Anna (1990), "A Network Model of Migration Equilibrium with Movement Costs", *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 13, pp. 79-88.
- Nagurney, Anna, Jie Pan y Lan Zhao (1992), "Human Migration Network", *European Journal of Operational Research*, vol. 59, pp. 262-274.
- Nagurney, Anna (1999), *Network Economics: a Variational Inequality Approach* (2ª edición revisada), Dordrecht-Boston-Londres, Kluwer Academic Publishers.