# CÁLCULO DE LA ESPERANZA DE VIDA ACTIVA DE UN TRABAJADOR: NOTA METODOLÓGICA*

JUAN CARLOS LERDA **
*Centro Latinoamericano de Demografía*

## I. INTRODUCCIÓN

1. En una tabla de vida activa (TVA),[1] se definen corrientemente dos funciones relacionadas con la duración media de los años que un individuo pasa en actividad:

*a)* la esperanza de vida "potencialmente" activa a la edad $x$: $(ea)_x$

*b)* la esperanza de vida activa de un trabajador a la edad $x$: $\overset{o}{e}a_x$

2. En la primera, se distribuye el tiempo vivido en actividad —desde $x$ hasta el final de la vida— por los integrantes de una cohorte hipotética entre el total de los sobrevivientes a dicha edad, sin distinguir su condición de activo o inactivo. De manera similar, en la segunda, se distribuye el mismo tiempo vivido entre los que llegan con vida a $x$ en calidad de activos. En consecuencia, cabe esperar se verifique:

$$(\overset{o}{e}a)_x \leq \overset{o}{e}a_x \qquad (1)$$

3. Si se simboliza con:

$l_x$ = sobrevivientes a la edad exacta $x$, de una cohorte inicial de $l_0$ personas, y

$a_x$ = proporción de personas activas a la edad exacta $x$,

entonces:

$$l^a_x = l_x \cdot a_x \qquad (2)$$

representa el número de "sobrevivientes activos" a la edad exacta $x$.

Así:

$$T^a_x = \int_x^w l^a_x \, dx \qquad (3)$$

* Preparado para las III Jornadas de Matemática Aplicada a la Economía, organizadas por el Instituto de Matemática y Estadística de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Se reproduce con la autorización de CELADE y de la universidad citada.

** Agradezco a los profesores J. C. Elizaga, A. N. Ortega, J. Somoza y A. M. Conning de CELADE sus comentarios y sugerencias al presente trabajo. Sin embargo, cualquier error debe acreditarse a la responsabilidad del autor.

1 En este artículo se hará referencia exclusiva a una TVA para hombres.

Indica el *tiempo vivido en actividad* por los sobrevivientes a la edad exacta $x$ hasta el final de la vida ($x = w$).

4. Con los elementos anteriores quedan definidas las esperanzas de vida mencionadas:

$$(\overset{o}{e}a)_x = \frac{T_x^a}{l_x} \qquad (4) \;; \qquad \overset{o}{e}a_x = \frac{T_x^a}{l_x^a} \qquad (5)$$

5. Al parecer, la relación (5) es de una validez tan general como la (4), o como la más conocida:

$$\overset{o}{e}_x = \frac{T_x}{l_x} \qquad (6)$$

esperanza de vida a la edad $x$, definida en una tabla de mortalidad convencional.

6. Sin embargo, el hecho de que la función: $a_x$ presente un máximo en $x = m$, introduce un elemento extraño en el planteo general en que se apoyan las expresiones (4) y (6), el que quizá podría sintetizarse por la idea: relacionar mediante cociente dos funciones monótonas decrecientes.

7. En efecto, en el caso de la esperanza de vida activa de un trabajador, la idea anterior sólo tiene vigencia en un determinado tramo de edades activas, puesto que la función: $l_x^a$, también presenta un valor extremo en las proximidades de $x = m$.

8. Así puede decirse que la relación $\frac{T_x^a}{l_x^a}$, sólo es adecuada para el cálculo de la vida media activa de un trabajador con edad $x \geq m$.

9. Por el contrario, el uso de la expresión (5) conduce invariablemente a una *sobrestimación* del verdadero nivel de la: $\overset{o}{e}a_x$, si la edad a que se refiere está comprendida entre el límite izquierdo del período de vida activa ($x = A$) y aquella en que la función-actividad $a_x$, alcanza su máximo absoluto ($x = m$).

10. El objeto de este artículo es precisamente:

*a)* Explicar el origen del sesgo, e ilustrarlo con un ejemplo sencillo.

*b)* presentar una deducción de la fórmula corregida para calcular: $\overset{o}{e}a_x$, cuando: $A < x < m$.

*c)* intentar un estudio analítico que permita identificar la relación existente entre la fórmula sesgada y la corregida, a fin de descomponer el error de manera conveniente para el análisis.

11. Finalmente, cabe destacar que el problema central aquí considerado no es nuevo en el campo demográfico o actuarial. Tal vez por ello, ha pasado a formar parte de una corte de temas que pueden ser tratados sin dificultad, cuando se dispone de una dosis razonable de

intuición y experiencia. Esta nota ha sido escrita en el sincero convencimiento de que no es éste el caso más habitual, cuando el interesado es alguien que tiene su primer contacto con la TVA o similares. A ellos está destinada.

## II. Origen del sesgo

12. Aceptando que $a_x$ es una función continua y derivable hasta de segundo orden por lo menos en el dominio: $D(A, L)$ existe suficiente evidencia empírica como para suponer que se verifican las siguientes relaciones:[2]

$$\frac{da_x}{dx} = a'_x > 0 \text{ para } A < x < m \tag{7}$$

$$\frac{da_x}{dx} = a'_x = 0 \text{ para } \quad x = m \tag{8}$$

$$\frac{da_x}{dx} = a'_x < 0 \text{ para } m < x < L \tag{9}$$

donde $A$ y $L$ representan las edades límite izquierda y derecha del período de la vida en que generalmente se da la participación en la fuerza de trabajo.[3]

13. Por otra parte, mientras la función $l_x^a$ puede considerarse un modelo de variación conjunta de mortalidad y actividad según edad, la función $a_x$, constituye un modelo descriptivo de la variación en los niveles de participación económica exclusivamente. De esta manera, las relaciones (7) y (9) indican la existencia de *ingresos* a la actividad y *retiros* profesionales, respectivamente.

14. Es precisamente el hecho de que la participación no alcanza su máximo nivel en $A$, sino que varía gradualmente —incrementándose— desde $a_A = 0$ hasta que en $m$ llega a su valor extremo ($a_m$), lo que, unido al procedimiento de cálculo, hace que los resultados obtenidos a partir de (5) resultan *sobrestimados*, cuando: $A < x < m$.

15. Como se ha visto antes, la función $T_x^a$ resulta de acumular el tiempo vivido en actividad por los sobrevivientes de la cohorte inicial, desde la edad $x$ hasta el final de la vida (supuesto que $L = w$). Ocurre entonces que para una edad cualquiera $A < x < m$, al hacer el cociente:

$$\frac{T_x^a}{l_x^a} \tag{5}$$

[2] En el Censo General de Población argentino, en 1960, el valor investigado de $A$ fue de 14 años; $m$ resultó de aproximadamente 35 años y $L$ no se definió. En el año de 1970, la PEA fue definida a partir de $A = 10$, no habiéndose dado instrucción respecto a $L$. No se dispone aún de información para estimar $m$.

[3] Fuerza de trabajo, población económicamente activa (PEA) y mano de obra, se usan aquí como sinónimos.

encontramos en el numerador no sólo el tiempo vivido desde $x$ en adelante por quienes ya son activos a tal edad, sino también los años-hombre pasados en la PEA por aquellos que se incorporan a la fuerza de trabajo en edades comprendidas entre $x$ y $m$.

16. Lo señalado en la última parte del párrafo anterior, constituye justamente la clave de la explicación: en la operación (5) se está distribuyendo un tiempo vivido en actividad, superior al que constituye la experiencia real de los supervivientes activos en $x$. La consecuencia inmediata es la anticipada *sobrestimación* del verdadero nivel de la $\overset{o}{e}a_x$.

17. Al parecer, la manera más simple de ilustrar las consideraciones que anteceden consiste en colocarse en el supuesto de ausencia de mortalidad, para el estudio de la experiencia de participación en la actividad de un individuo en $D(A, L)$. En tal caso:

$$\overset{o}{e}a_x = \frac{T_x^a}{l_x^a} = \frac{\int_x^L l_x a_x \, dx}{l_x a_x} = \frac{\int_x^L a_x \, dx}{a_x} \qquad (10)$$

lo que conviene descomponer en dos sumandos:

$$\frac{\int_x^m a_x \, dx}{a_x} + \frac{\int_m^L a_x \, dx}{a_x} \qquad (11)$$

y al aplicar el teorema del valor medio en el cálculo integral:

$$\frac{a_v}{a_x}(m - x) + \frac{\int_m^L a_x \, dx}{a_x} \qquad (12)$$

donde: $x < v < m$.

18. El examen de la relación (11) nos indica que estamos frente a una suma de dos esperanzas de vida activa: una, temporaria e inmediata por $(m - x)$ años y la otra, diferida por igual período, en ambos casos, a partir de $x$.

19. Al transformar la relación anterior en la (12), surge claramente que la esperanza temporaria, tal como se expresa, representa una *sobrestimación* del número máximo de años que un individuo puede vivir en el intervalo $(x, m)$. En efecto, al usar el teorema del valor medio en circunstancias en que $a_x$ es creciente, se verifica:

$$\frac{a_v}{a_x} > 1 \qquad (13)$$

20. Sin embargo, mientras el componente temporario refleja a simple vista el sesgo mencionado, no es tan evidente lo que ocurre con el

componente diferido. Reiterando la aplicación del teorema del valor medio, resulta:

$$\frac{a_v}{a_x}(m-x)+\frac{a_s}{a_x}(L-m) \tag{14}$$

donde: $m < s < L$.

21. Puede notarse que $a_s$ es invariante respecto a $x$, y depende exclusivamente de la forma analítica de la función-actividad en el intervalo $(m, L)$. Además, a partir de lo indicado en (9), se deduce que:

$$a_m > a_s > a_L = 0 \tag{15}$$

22. Atendiendo a lo señalado en el párrafo 12, siempre es posible identificar en un punto $x = r$, comprendido entre $A$ y $m$ para el que se verifica:

$$a_r = a_s \tag{16}$$

y a partir del cual surgen tres casos en que conviene analizar la relación (14):

*i)* $A < x < r$ implica:

$$\frac{a_v}{a_x} > 1;\ \frac{a_s}{a_x} > 1$$

de lo cual se infiere que ambos componentes resulten *sobrestimados* puesto que al colocarnos en el supuesto de ausencia de mortalidad —biológicamente— lo máximo que se puede esperar que viva una persona es $(m - x)$ y $(L - m)$, respectivamente. En este caso y en los que resta considerar, debe tenerse presente que para la función $a_x$ están vigentes las características enunciadas en el párrafo 12, es decir, que el tiempo vivido en actividad es inferior al tiempo vivido en cualquier condición: activo o inactivo. Una excepción a esto último se daría en el caso de que a partir de una cierta edad, la función-actividad fuera constante e igual a la unidad.

*ii)* $x = r$ implica:

$$\frac{a_v}{a_x} > 1;\ \frac{a_s}{a_x} = 1$$

de donde también se deduce que los dos componentes se encuentran *sobrestimados*. Puesto que entre $x$ y $m$, el número máximo de años que se puede vivir en $(m - x)$, el hecho de encontrarse amplificado por un coeficiente superior a la unidad muestra claramente la existencia de un sesgo. Respecto al segundo término de la relación (14), admite una reflexión semejante, aunque no del todo evidente, por el hecho de que el coeficiente $a_s/a_x$ es igual a la unidad. Sin embargo, surge la evidencia del sesgo al recordar que en el intervalo $(m, L)$, se verifica $a'_x < 0$, lo cual equivale a decir que la participación no es del 100 % y, en consecuencia, el tiempo vivido en actividad es inferior al tiempo total vivido.

*iii)* $r < x < m$ implica:

$$\frac{a_v}{a_x} > 1 ; \frac{a_s}{a_x} < 1$$

puesto que el coeficiente del intervalo correspondiente a la vida media activa temporaria es, una vez más, superior a la unidad, no queda lugar a dudas acerca de la existencia de *sobrestimación* pero a simple vista no podría decirse que ocurre lo mismo con el componente diferido, dado que para éste figura un factor menor que la unidad. Para estudiar este caso, conviene tener presente la relación que liga la esperanza de vida a la edad $x$, temporaria por $n$ años, la probabilidad de supervivencia entre $x$ y $x+n$ con la esperanza a la edad $x+n$, en una tabla de mortalidad convencional:

$$_{n/}\mathring{e}_x = {}_np_x \cdot \mathring{e}_{x+n}$$

y extenderla al campo de la TVA:

$$_{m-x/}\mathring{e}a_x = {}_{m-x}p_x \cdot \mathring{e}a_m \qquad (17)$$

lo que es lícito hacer en vista de que el tramo de edades considerado es aquel en que $a'_x < 0$. En razón de que el examen precedente se apoya en el supuesto de que $_{m-x}p_x = 1$ para cualquier valor de $x$ en $D(A, L)$, se deduce que:

$$_{m-x/}\mathring{e}a_x = \mathring{e}a_x = \frac{\int_m^L a_x \, dx}{a_m} = \frac{a_s}{a_m}(L - m)$$

De lo anterior se desprende que el nivel correcto del componente diferido se alcanza sólo cuando en el planteo de la relación (14) la variable edad toma su límite $m$.

23. A fin de ilustrar numéricamente las condiciones anteriores se presenta un ejemplo cuyos supuestos de trabajo serán discutidos una vez expuestos. Ellos son:

*a)* mortalidad y retiros profesionales nulos, en $D(A, L)$.

*b)* función-actividad $a_x = a_m \dfrac{x - A}{m - A}$ ; en $D(A, m)$.

24. Al interpretar la función: $l_x$ de una TVA como un modelo des-

criptivo del nivel y estructura de la participación en la actividad económica, según edad, se está indicando implícitamente la existencia de tres factores "determinantes": nivel y distribución por edad de la mortalidad, ingreso a la actividad y retiros profesionales.

25. Según el esquema anterior, dada una composición por edades de la participación, su nivel se ve disminuido por efectos del primer y tercer factor, mientras que el segundo tiende a incrementarlo, al menos, en un cierto tramo de edades $(A, m)$.

26. Puesto que de acuerdo con lo señalado en el párrafo 15, la sobrestimación se origina en la inclusión en el numerador de (5) del tiempo vivido en actividad por quienes se incorporan a la PEA con posterioridad a la edad $x$ a que se refiere la estimación y antes de cumplir $m$ años, la consideración de que la mortalidad y los retiros son nulos no afecta la corrección del razonamiento sino en el sentido de exagerar la importancia del sesgo.

27. En relación a la hipótesis $b$), puede decirse que si bien no corresponde perfectamente a la experiencia corriente, tampoco modifica el sentido de la proposición a verificar.

28. En caso de que se quisiera tener una mejor aproximación, si no a la forma real del fenómeno, cuando menos a la que "se suele suponer que tiene", podría hacerse una de las siguientes hipótesis alternativas:

$$i)\ a'_x > 0; \quad a''_x < 0 \quad \text{para } A < x < m$$

$$ii)\ a'_x > 0; \quad \begin{cases} a''_x > 0 & \text{para } A < x < b \\ a''_x < 0 & \text{para } b < x < m \end{cases}$$

donde: $x = b$ representa el punto en el que $a_x$ cambia de curvatura.

29. Si lo real fuera $i$), con el supuesto aquí adoptado, se estaría subestimando la verdadera importancia del sesgo. En el caso de que $ii$) represente la situación correcta, no es fácil adelantar el resultado. Sin embargo, existe alguna evidencia empírica en el sentido de que la edad a la que se produce el punto de inflexión conserva con $m$ una relación del tipo:

$$b < \frac{m + A}{2}$$

en cuyo caso —aunque analíticamente no constituye condición suficiente— podría esperarse que el efecto promedio, en $D(A, m)$, sería del tipo indicado en $i$).

30. De lo anterior se desprende que la introducción de los supuestos mencionados no representa ninguna restricción y, por el contrario, su extrema sencillez contribuye a facilitar el tratamiento así como a destacar la dirección del sesgo.

31. Si se identifican los parámetros del supuesto $b$) —párrafo 23—

con valores corrientes, se puede dar forma numérica al modelo propuesto, obteniéndose el cuadro 1.

Cuadro 1

ESTIMACIÓN DE LA ESPERANZA DE VIDA ACTIVA DE UN TRABAJADOR MEDIANTE LA RELACIÓN (5)

| $x$ | $l_x$ | $a_x$ | $l_x^a$ | $_5L_x$ | $_5L_x^a$ | $T_x$ | $T_x^a$ | $\mathring{e}_x$ | $(\mathring{e}a)x$ | $\breve{e}a_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 1 | 0.00 | 0.00 | 5.0 | 0.625 | 55 | 45.000 | 55 | 45.000 | - |
| 20 | 1 | 0.25 | 0.25 | 5.0 | 1.875 | 50 | 44.375 | 50 | 44.375 | 177.5 |
| 25 | 1 | 0.50 | 0.50 | 5.0 | 3.125 | 45 | 42.500 | 45 | 42.500 | 85.0 |
| 30 | 1 | 0.75 | 0.75 | 5.0 | 4.375 | 40 | 39.375 | 40 | 39.375 | 52.5 |
| 35 | 1 | 1.00 | 1.00 | 5.0 | 5.000 | 35 | 35.000 | 35 | 35.000 | 35.0 |
| 40 | 1 | 1.00 | 1.00 | 5.0 | 5.000 | 30 | 30.000 | 30 | 30.000 | 30.0 |
| 45 | 1 | 1.00 | 1.00 | 5.0 | 5.000 | 25 | 25.000 | 25 | 25.000 | 25.0 |
| 50 | 1 | 1.00 | 1.00 | 5.0 | 5.000 | 20 | 20.000 | 20 | 20.000 | 20.0 |
| 55 | 1 | 1.00 | 1.00 | 5.0 | 5.000 | 15 | 15.000 | 15 | 15.000 | 15.0 |
| 60 | 1 | 1.00 | 1.00 | 5.0 | 5.000 | 10 | 10.000 | 10 | 10.000 | 10.0 |
| 65 | 1 | 1.00 | 1.00 | 5.0 | 5.000 | 5 | 5.000 | 5 | 5.000 | 5.0 |
| 70 | 1 | 1.00 | 1.00 | - | - | - | - | - | - | - |

En dicho párrafo: $A = 15$; $m = 35$; $L = w = 70$; $a_m = 1.00$.

32. Un examen rápido de los valores tabulados —en particular los de la última columna— permite concluir que la hipótesis que se viene dicutiendo queda ampliamente verificada. Así, al usar $T_x^a/l_x^a$ para edaedades inferiores a los 35 años, se encuentran niveles de la estimación que son, incluso, superiores a las correspondientes esperanzas de vida biológicas. Tal es el caso de $ea_x$, para $x = 20, 25, 30$, sin contar $x = 15$, en que un análisis continuo determinaría un límite infinito positivo.

33. La observación del cuadro mencionado permite comprobar, en el contexto de los supuestos elegidos, que la relación (5) es correcta cuando $x \geqslant m$. La verificación de este hecho es independiente de las hipótesis del presente ejemplo y tiene sustentación teórica en lo señalado en el párrafo 6.

34. Puede agregarse a los anteriores comentarios que la función $_5L_x$ ha sido tabulada bajo el supuesto de una variación lineal de la función-actividad. En virtud de los supuestos del modelo la fórmula de integración numérica utilizada:

$$_5L_x^a = 2.5\,(l_x^a + l_{x+5}^a)$$

arroja los mismos resultados que los que se pueden obtener con una expresión ligeramente más refinada:

$$_5\hat{L}_x^a = 0.5\,(_5L_x + {_5L_x} \cdot a_x + 2.5)$$

35. Finalmente, cabe reiterar que la introducción en el análisis de valores positivos de mortalidad y retiros se traduciría en una disminución de la importancia del sesgo; sin embargo, el sentido de éste se mantendría invariable, por las razones adelantadas en el párrafo 14.

36. Una vez explicado e ilustrado el origen y dirección del sesgo, se dedicará la sección siguiente a presentar una deducción de la fórmula corregida.

## III. Fórmula corregida

37. Como se indicó en la introducción, el reconocimiento de la necesidad de introducir una corrección en la relación (5) para $A < x < m$ no es nueva. Diversos autores recogen esta idea en sus trabajos, aunque, tal vez por aquello de que se trata de un problema obvio, no presentan al usuario una deducción que la justifique.[4]

38. Siguiendo las ideas presentadas en la relación (11) y por analogía con la definición de $\overset{o}{e}_x$, de una tabla de mortalidad convencional, en la que se verifica:

$$\overset{o}{e}_x = /_n\overset{o}{e}_x + {}_n/\overset{o}{e}_x \qquad (18)$$

donde:

$$/_n\overset{o}{e}_x = \frac{\int_x^{x+n} l_x\,dx}{l_x} = \frac{T_x - T_{x+n}}{l_x} \qquad (19)$$

(esperanza de vida a la edad $x$, *temporaria* por $n$ años)

$$_n/\overset{o}{e}_x = \frac{\int_{x+n}^{w} l_x\,dx}{l_x} = \frac{T_{x+n}}{l_x} \qquad (20)$$

(esperanza de vida a la edad $x$, *diferida* por $n$ años)

es posible escribir:

$$\overset{o}{e}a_x = /_{m-x}\overset{o}{e}a_x + {}_{m-x}/\overset{o}{e}a_x \qquad (21)$$

en que, de manera similar:

$$/_{m-x}\overset{o}{e}a_x = \frac{\int_x^{m} l_x^a\,dx}{l_x^a} = \frac{T_x^a - T_m^a}{l_x^a} \qquad (22)$$

(esperanza de vida activa de un trabajador a la edad $x$, *temporaria* por $(m - x)$ años)

$$_{m-x}/\overset{o}{e}a_x = \frac{\int_m^{L} l_x^a\,dx}{l_x^a} = \frac{T_m^a}{l_x^a} \qquad (23)$$

(esperanza de vida activa de un trabajador a la edad $x$, *diferida* por $(m - x)$ años)

[4] En este sentido puede consultarse, entre otros, a S. L. Wolfbein, "The Length of Working Life", *Population Studies*, diciembre de 1949, p. 291, y Naciones Unidas, ST/SOA/Serie A/43, Cap. I, p. 24.

39. La expresión (21) resulta conveniente con fines de análisis y facilita la derivación de la fórmula corregida.

40. Respecto al primer sumando ($/_{m-x}\overset{o}{e}a_x$): en razón de que uno de los supuestos básicos que corrientemente se hacen para la construcción de una TVA es el de que no existe mortalidad diferencial por edad entre activos e inactivos, resulta compatible con ello decir que la esperanza de vida activa temporaria —en un tramo de edades en el que la única fuente de eliminación la constituye la mortalidad biológica— debe ser *igual* a la esperanza de vida temporaria, en el mismo intervalo, de un elemento genérico de la población. Es decir, que debe verificarse:

$$/_{m-x}\overset{o}{e}a_x = /_{m-x}\overset{o}{e}_x \qquad (24)$$

41. Respecto al segundo sumando ($_{m-x}/\overset{o}{e}a_x$): puesto que este indicador se encuentra referido a un intervalo de edades para el que se supone que no existen ingresos y en el que sólo se producen salidas de la actividad (por muerte o retiro profesional), no existe restricción a que el mismo sea tratado como una esperanza de vida diferida, correspondiente a una tabla de mortalidad convencional. De lo anterior y por analogía con la relación (17), se puede escribir:

$$_{m-x}/\overset{o}{e}a_x = {}_{m-x}p_x \cdot \overset{o}{e}a_m \qquad (25)$$

42. Reuniendo los elementos anteriores, puede escribirse la relación (21) como:

$$\overset{o}{e}a_x = /_{m-x}\overset{o}{e}_x + {}_{m-x}p_x \cdot \overset{o}{e}a_m \qquad (26)$$

o también, en su forma operacional:

$$\overset{o}{e}a_x = \frac{T_x - T_m}{l_x} + \frac{l_m}{l_x} \cdot \frac{T^a_m}{l^a_m} \qquad (27)$$

43. Es de observar que en la deducción anterior no se ha hecho intervenir explícitamente ningún elemento que vincule los ingresos a la actividad con la solución del problema. En lo que resta de esta sección se procura ligar ambos aspectos.

44. Anteriormente —párrafos 14 y 15— se ha destacado el hecho de que la relación (5) constituye una sobrestimación del verdadero nivel de la $\overset{o}{e}a_x$, cuando $A<x<m$, en razón de que con tal operación se distribuye un tiempo vivido en actividad, superior a la experiencia real de participación, por parte de quienes son sobrevivientes activos a la edad $x$. Dicho de manera muy general: no existe correspondencia entre numerador ($T^a_x$) y denominador ($l^a_x$).

45. La eliminación del sesgo vendrá entonces —siguiendo este camino— a partir de alguna transformación que haga compatible la relación entre ambos elementos.

46. Un procedimiento general de resolución consistiría en calcular

el tiempo vivido en actividad a lo largo del intervalo $(x, m)$, suponiendo la vigencia de una tasa constante, $a$, que por la naturaleza del problema debe cumplir con: $0 < a \leqslant 1$.

47. De acuerdo con lo anterior, el tiempo vivido en actividad que ahora resulta será:

$$T_x^{\hat{a}} = {}_{m-x}L_x^{\hat{a}} + T_m^a = \int_x^m a \cdot l_x \, dx + \int_m^L l_x^a \, dx \qquad (28)$$

el que corresponde distribuir entre los sobrevivientes activos "esperados" en $x$:

$$l_x^{\hat{a}} = a \cdot l_x \qquad (29)$$

48. Haciendo el cociente entre las relaciones (28) y (29) se obtiene la forma general:

$$\mathring{e}a_x = \frac{T_x^{\hat{a}}}{l_x^{\hat{a}}} = \frac{T_x - T_m}{l_x} + \frac{a_m}{a} \cdot \frac{l_m}{l_m} \cdot \frac{T_m^a}{l_m^a} \qquad (30)$$

49. Al comparar la expresión anterior con la relación (17), se puede observar que sólo coincide en caso de que se haya elegido: $a = a_m$; en caso contrario, se estaría introduciendo un sesgo en el componente diferido —y por extensión en la estimación de $\mathring{e}a_x$— que sería por defecto o por exceso, según fuesen los valores particulares de $a$ y $a_m$.

50. De lo anterior se deduce que la tasa constante a elegir no puede ser arbitraria como se supone al principio, sino que debe ser la correspondiente al punto para el que la función-actividad presenta su máximo.

51. En cuanto a la idea de incorporar una tasa de actividad constante, puede interpretarse en el sentido de que en cada edad $A<x<m$, ya se encuentran incorporados a la actividad todos aquellos que alguna vez lo harán y llegan con vida a $m$. Su fundamentación proviene de la mencionada necesidad de compatibilizar numerador y denominador, pudiéndose formalizar a partir de la relación (24) la que puede escribirse como:

$$\frac{\int_x^m l_x \cdot a_x \, dx}{l_x \cdot a_x} = \frac{\int_x^m l_x \, dx}{l_x} \qquad (24 \text{ bis})$$

y usando el teorema del valor medio en el cálculo integral se llega a:

$$\frac{a_x}{a_x} \int_x^m l_x \, dx = \int_x^m l_x \, dx \qquad (31)$$

donde $a_v$, fue definido anteriormente.

52. De lo visto se desprende que la verificación de la relación (24) —supuesto básico en la construcción de la TVA mientras no se conozca

realmente el patrón de mortalidad de los activos— está sujeto a la condición:

$$\frac{a_v}{a_x} = 1 \qquad (32)$$

y, en consecuencia, a que la función-actividad se comporte como una constante en el intervalo de edades $(A, m)$, independientemente de la forma analítica del: $l_x$.

53. ¿Qué ocurre si ${}_{m-x}q_x = 0$? En tal caso, la relación (27) se reduce a:

$$\overset{o}{e}a_x = (m - x) + \frac{T^a_m}{l^a_m} \qquad (33)$$

lo que permite ver su mecanismo lógico: los $(m - x)$ años del primer sumando resultan del supuesto adoptado y en virtud del mismo, un sobreviviente activo a la edad $x$ se hace "acreedor" al 100 % de lo que corresponde a los trabajadores que llegan con vida a $m$. Como puede observarse, bajo condiciones reales de mortalidad, tal "crédito", varía en proporción directa a la probabilidad de sobrevivencia en el período.

54. Finalmente, vinculando la fórmula corregida —relación (27)— con el ejemplo presentado en la primera sección, es claro que en virtud de los supuestos elegidos aquélla se reduce a:

$$\overset{o}{e}a_x = 70 - x \qquad (34)$$

pudiéndose ahora comparar los resultados de la estimación sesgada y la corregida. (Véase el cuadro 2.)

Cuadro 2

ESPERANZA DE VIDA ACTIVA DE UN TRABAJADOR, PARA: $15 < x \leqslant 35$, ESTIMACIÓN SESGADA Y CORREGIDA, ERRORES ABSOLUTOS Y RELATIVOS

| Edad | Estimación sesgada relación (5) | Estimación corregida relación (27) ó (34) | Error | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Absoluto | Relativo(%) |
| 20 | 177.5 | 50.0 | 127.5 | 155.00 |
| 25 | 85.0 | 45.0 | 40.0 | 88.90 |
| 30 | 52.5 | 40.0 | 12.5 | 31.25 |
| 35 | 35.0 | 35.0 | ---- | ----- |

55. Observando el cuadro 2, pueden hacerse por lo menos dos breves comentarios de interés. En primer lugar, que la relación (27) describe correctamente las características del modelo examinado. En segundo lugar, cabe hacer resaltar que la sobrestimación provocada por el uso de la relación (5) es sistemática para toda edad inferior a los 35 años, pero que decrece con la edad —al parecer— de acuerdo con una ley hiperbólica.

## IV. Relación entre la fórmula sesgada y la corregida. Descomposición del error

56. A fin de generalizar las ideas que condujeron a la relación (14), es posible escribir:

$$\frac{T_x^a}{l_x^a} = \frac{\int_x^L l_x^a\,dx}{l_x^a} = \frac{\int_x^m l_x^a\,dx}{l_x^a} + \frac{\int_m^L l_x^a\,dx}{l_x^a} \tag{35}$$

y aplicando el teorema del valor medio en el cálculo integral a la vez que se hacen algunas transformaciones, se arriba a una forma general de la fórmula sesgada:

$$\frac{T_x^a}{l_x^a} = \frac{a_v}{a_x}\cdot\frac{T_x - T_m}{l_x} + \frac{a_m}{a_x}\cdot\frac{l_m}{l_x}\cdot\frac{T_m^a}{l_m^a} \tag{36}$$

donde $a_v$ ha sido definido antes.

57. Comparando la expresión anterior con la relación (27), queda claro que aquélla contiene a ésta como un caso particular. Tal circunstancia se verifica cuando:

$$a_x = a_v = a_m$$

lo que puede interpretarse en el sentido, ya adelantado, de que la participación máxima se presenta desde el inicio del período de la vida activa. Este artificio algebraico, necesario para resolver el sesgo y que fuera aceptado al comentar la relación (30), implica suponer que la incorporación a la actividad no es un proceso más o menos gradual entre $A$ y $m$, sino un fenómeno que se da simultánea y totalmente en $A$.

58. Llamando "factores de distorsión" a:

$$f(x) = \frac{a_v}{a_x}\ ; \quad g(x) = \frac{a_m}{a_x}$$

se verifica:

$$\lim_{x \to A} f(x) = +\infty\ ; \quad \lim_{x \to m} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to A} g(x) = +\infty\ ; \quad \lim_{x \to m} g(x) = 1$$

de donde se concluye que, efectivamente, el sesgo varía hiperbólicamente en el intervalo $(A, m)$, según se anticipara en los comentarios al cuadro 2.

59. Puesto que en realidad: $a_x < a_v < a_m$, se verifica que $f(x) < g(x)$, de donde se infiere que la distorsión total puede ser descompuesta en dos partes, cuya importancia absoluta y relativa difieren.

60. En relación con el error vinculado al componente temporario, puede decirse que es de menor peso relativo que el asociado con el exponente diferido. En cuanto al valor absoluto, cabe esperar una relación del mismo tipo que la mencionada, si los límites de la vida activa se fijan en 15 y 70 años, respectivamente, variando *m* alrededor de los 35 años.

61. Con los elementos de análisis presentados, es posible intentar un sencillo ejemplo numérico, con el objeto de medir la importancia de $f(x)$ y $g(x)$. Para tal fin, se ha considerado la información provista por el cuadro 1.

62. Atendiendo en primer lugar al error asociado con la esperanza de vida activa temporaria de un trabajador, se obtienen las cifras del cuadro 3.

Cuadro 3

ANÁLISIS NUMÉRICO DEL ERROR PROVENIENTE DE F(X), SEGÚN EDAD

| $x, m$ | $v$ | $a_v$ | $a_x$ | $f(x)$ | $\ell_x$ | $T_x$ | $T_x - T_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20,35 | 27.5 | 0.625 | 0.25 | 2.500 | 1 | 50 | 15 |
| 25,35 | 30.0 | 0.750 | 0.50 | 1.500 | 1 | 45 | 10 |
| 30,35 | 32.5 | 0.875 | 0.75 | 1.167 | 1 | 40 | 5 |
| 35 = m | 35.0 | 1.000 | 1.00 | 1.000 | 1 | 35 | – |

| $x, m$ | $v$ | Estimación ${}_{m-x}\mathring{e}a_x$: $\frac{T_x - T_m}{\ell_x}$ (corregida) (en años) | Estimación ${}_{m-x}\mathring{e}a_x$: $f(x)\,\frac{T_x - T_m}{\ell_x}$ (sesgada) (en años) | Error respecto al valor corregido: Absoluto (en años) | Error respecto al valor corregido: Relativo $(f(x)-1) \cdot 100$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20,35 | 27.5 | 15 | 37.500 | 22.500 | 150.0 |
| 25,35 | 30.0 | 10 | 15.000 | 5.000 | 50.0 |
| 30,35 | 32.5 | 5 | 5.835 | 0.835 | 16.7 |

63. De manera similar es posible construir el cuadro 4.

Cuadro 4

ANÁLISIS NUMÉRICO DEL ERROR PROVENIENTE DE G(X)

| $x, m$ | $a_x$ | $g(x)$ | ${}_{m-x}p_x$ | $\ell^a_m$ | $T^a_m$ | $\mathring{e}a_m = T^a_m / \ell^a_m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20,35 | 0.25 | 4.000 | 1 | 1 | 35 | 35 |
| 25,35 | 0.50 | 2.000 | 1 | 1 | 35 | 35 |
| 30,35 | 0.75 | 1.333 | 1 | 1 | 35 | 35 |
| 35 = m | 1.00 | 1.000 | 1 | 1 | 35 | 35 |

| $x, m$ | Estimación ${}_{m-x}/\mathring{e}a_x$: ${}_{m-x}p_x \cdot \mathring{e}a_x$ (corregida) (en años) | Estimación ${}_{m-x}/\mathring{e}a_x$: $g(x)\,{}_{m-x}p_x \cdot \mathring{e}a_x$ (sesgada) (en años) | Error respecto al valor corregido: Absoluto (en años) | Error respecto al valor corregido: Relativo $(g(x) - 1) \cdot 100$ |
|---|---|---|---|---|
| 20,35 | 35 | 140.000 | 105.000 | 300.0 |
| 25,35 | 35 | 70.000 | 35.000 | 100.0 |
| 30,35 | 35 | 6.655 | 11.655 | 33.0 |

64. Al examinar las cifras de los cuadros 3 y 4 es posible reconocer que:

*i)* al usar $T_x^a / l_x^a$ para el cálculo de la $\overset{o}{e}a_x$, cuando $A < x < m$, se llega invariablemente a una sobrestimación de su verdadero nivel que afecta a sus dos componentes de manera distinta.

*ii)* la importancia del error que se comete en tales circunstancias —tanto en términos absolutos como relativos— es mayor en el componente diferido que en el temporario.

*iii)* la evaluación del sesgo es decreciente con la edad, según una ley hiperbólica, para ambos componentes.

65. Cabe observar, como control, que la suma de los valores correspondientes a los errores absolutos, en los cuadros 3 y 4, coincide con las cifras relacionadas a la estimación sesgada que figura en los cuadros 1 y 2.

66. Finalmente, una última observación en relación con los errores relativos por edad originados en los "factores de distorsión" $f(x)$ y $g(x)$. Sistemáticamente se encuentra que este último es el doble del primero. Ello es consecuencia del supuesto combinado de linealidad en la variación de la función-actividad y de constancia en $l_x$, lo que permitió usar en forma exacta:

$$a_v = 0.5\,(a_x + a_m)$$

y que reemplazando oportunamente, verifica:

$$\frac{g(x) - 1}{f(x) - 1} = \frac{a_x - a_x}{a_v - a_x} = 2$$

## V. Resumen

1. En una tabla de vida activa (TVA), se tabulan corrientemente los valores correspondientes a la función bioeconómica "esperanza de vida activa de un trabajador".

2. Definiendo los límites de edad dentro de los cuales se da la participación en la población económicamente activa (PEA), como $A$ y $L$, existe un punto $m$ para el cual las tasas de actividad por edad presentan un máximo.

3. La existencia de un valor extremo como el indicado puede interpretarse en el sentido de que antes de tal edad no se ha completado aún el proceso de incorporación a la fuerza de trabajo por parte de los integrantes de la generación hipotética que se representan en la TVA. Por tal motivo, al estimar el nivel de: $\overset{o}{e}a_x$, para: $A<x<m$, mediante la relación:

$$\frac{T_x^a}{l_x^a} \qquad (5)$$

en el numerador se encuentra, por una parte, el tiempo vivido en actividad desde $x$ en adelante, por quienes son sobrevivientes activos a tal edad y, además el correspondiente a todo individuo que se incorpora a la PEA entre $x$ y $m$.

4. En virtud de que este último nada tiene que ver con la experiencia de participación en la fuerza de trabajo de quienes forman el conjunto $l_x^a$, se presenta una falta de correspondencia entre numerador y denominador cuyo resultado es provocar una sobrestimación del verdadero nivel del indicador.

5. En consecuencia, para tabular la función esperanza de vida activa de un trabajador, deberán utilizarse dos fórmulas distintas según el tramo de edades que se considere:

$$\text{Si } A < x < m: \; \mathring{e}a_x = \frac{T_x - T_m}{l_x} + \frac{l_m}{l_x} \cdot \frac{T_m^a}{l_m^a}$$

$$\text{Si } m \leqslant x < L: \; \mathring{e}a_x = \frac{T_x^a}{l_x^a}$$