Un modelo de control óptimo para la determinación de políticas de migración

Absalón Romero Silva*

Este artículo presenta el uso de un modelo de control óptimo basado en el principio del máximo discreto de Pontryagin para la determinación de políticas de migración en el Distrito Federal y en el Estado de México entre 1982 y 1995.

Introducción

El modelo de control óptimo para determinar políticas de migración en el Distrito Federal y en el Estado de México se basa en el principio del máximo discreto de Pontryagin, y utiliza técnicas de gradiente conjugado y de búsqueda para la solución del problema matemático de dos puntos con valores en la frontera. El análisis es válido para el periodo 1982-1995.

Este modelo vincula los niveles de natalidad, mortalidad y población al inicio del periodo con los niveles de migración. Una vez conocidos los niveles de natalidad y mortalidad para el periodo de estudio, y la población al inicio del mismo, el modelo determina el saldo neto migratorio y el tamaño de la población para todos los años en el nivel migratorio deseado durante dicho periodo. Contando con proyecciones en los niveles de natalidad y mortalidad, el modelo permite describir el comportamiento futuro de la población según las políticas de migración planteadas.

Como soporte para el modelo se elaboró un programa de cómputo en lenguaje C ++, utilizando un equipo PC, Pentium.

Modelo de control óptimo

Existe una diversidad de modelos matemáticos que se han utilizado para describir los fenómenos demográficos, como la migración, nupcialidad, fecundidad y crecimiento de la población, entre otros.

El uso de los métodos de optimización en áreas como la ingeniería, economía, finanzas y administración es ampliamente conocido.

* Profesor-investigador del Instituto de Investigación y Posgrado de la Universidad de las Américas, Puebla.

Sin embargo, los modelos de investigación de operaciones en las ciencias sociales han sido escasamente aplicados en nuestro país. La teoría de control óptimo, como herramienta matemática, puede ser utilizada para coadyuvar al establecimiento de políticas de migración en nuestro país, conforme a metas preestablecidas sobre el crecimiento poblacional.

La decisión por este tipo de aplicación se debe en gran medida a la preocupación por el crecimiento descontrolado de algunas zonas de nuestro país; crecimiento no tanto natural sino por distribución espacial, que trae consigo diversas clases de problemas que afectan e impiden el desarrollo regional y nacional.

Con este modelo aplicado a la demografía se pretende determinar las políticas de migración para el control de las entradas a las zonas metropolitanas.

Consideremos un sistema hipotético de estados del país. El objetivo es maximizar un beneficio social establecido en un horizonte de planeación de T años. Suponemos conocidos los volúmenes iniciales de población en los estados, el crecimiento natural (nacimientos-muertes) y las condiciones de frontera. La función objetivo es típicamente no lineal y la formulación del modelo es la siguiente:

$$\text{Max } F = \sum_{t=1}^{T} F_t(x_{t+1}, u_t) + \varnothing(x_{T+1}) \qquad [i]$$

$$\text{s.a. } x_{t+1} = x_t + q_t - u_t + Ru_t \qquad [2]$$

$$x_{\min} \leq x_{t+1} \leq x_{\max} \qquad [3]$$

$$u_{\min} \leq u_t \leq u_{\max} \qquad [4]$$

donde:

x_t = población total en el año t

u_t = saldo migratorio neto en el año t

$x_{\max}, x_{\min}$ = cotas para la población total en el año t

$u_{\max}, u_{\min}$ = cotas para la migración neta en el año t

q_t = crecimiento natural en el año t (nacimientos - muertes)

R_{ij}= matriz de rutas. Donde el estado i recibe población del estado j

F_t (.) = beneficio social incremental en el periodo t

$\varnothing(x_{T+1})$ = beneficio social en el último periodo

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el estado i recibe población del estado j} \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Con esta estructura de planteamiento se puede establecer el algoritmo de control óptimo que resuelve dicho problema.

Algoritmo de control óptimo

El problema general de optimización puede modelarse como un problema de control óptimo discreto, utilizando la forma discreta del principio del máximo de Pontryagin. Sin embargo, se requieren consideraciones especiales para las restricciones del espacio de las variables de estado. Una de las formas más sencillas de trabajar con este tipo de restricciones es con el uso de términos de penalización cuadráticos.

La definición de la función hamiltoniana para dicho problema será:

$$J=\phi[x_{T+1}]+\sum_{t=1}^{T}\{F_t(x_{t+1},u_t)+\lambda_t^{T}\{x_t-u_t+Ru_t+q_t-x_{t+1}\}\}+\eta^{t}W\eta \qquad [5]$$

donde :

$\eta = \max(0, x_{t+1} - x_{\max}) + \min(0, x_{t+1} - x_{\min})$
W= Matriz diagonal de penalización
λ = multiplicadores de Lagrange

El principio del máximo para resolver el problema de control óptimo antes señalado requiere de la determinación del conjunto de multiplicadores de Lagrange y de trayectorias admisibles que maximicen la función hamiltoniana.

Matemáticamente, lo dicho envuelve la solución simultánea de un conjunto de condiciones de transversatilidad, adjuntas y estacionarias que en conjunto resulta ser lo que se conoce como problema de valor en la frontera de dos puntos (PVFDP).

La ecuación adjunta y la de transversatilidad se obtienen por la diferenciación parcial de la función hamiltoniana con respecto a la variable x en el problema general:

$$\lambda_t = \lambda_{t+1} + \nabla x_{t+1} F_t(.) + 2W\eta \qquad \text{para t = 1, 2,..., T-1)} \qquad [6]$$

$$\lambda_T = \nabla x_{t+1} F_t(.) + 2W\eta + \nabla x_{t+1} \varnothing(x_{t+1}) \quad \text{para t=T} \qquad [7]$$

La condición estacionaria se obtiene similarmente mediante la diferenciación parcial de la función hamiltoniana con respecto a la variable de control (u):

$$\nabla u_t J = \nabla u_t F_t(u,x) + (R-I)^t \lambda_t = 0 \qquad [8]$$

Para un sistema con dimensión N, las ecuaciones anteriores generan 2N ecuaciones no lineales y cuya solución determina los valores óptimos λ^*y u^*.

Para la gran mayoría de problemas prácticos no es fácil o posible la solución de estas ecuaciones no lineales, por tal motivo se utilizan con mayor frecuencia los métodos de solución directa. Un enfoque consiste en proponer una solución inicial de la trayectoria de control con la cual se genera una estimación de los multiplicadores de Lagrange mediante la solución recursiva de las ecuaciones adjuntas y de transversatilidad.

Con estas estimaciones de λ el gradiente de la función hamiltoniana puede calcularse utilizando la ecuación [8] y utilizando un algoritmo de búsqueda se determina una estimación mejorada de las variables de control. Este procedimiento iterativo se repite hasta que los multiplicadores de Lagrange y la trayectoria de control convergen a sus posibles valores óptimos. Para asegurar la obtención de un óptimo local se proponen varias trayectorias iniciales para alcanzarlo. El esfuerzo computacional con este enfoque dependerá directamente de la eficiencia del procedimiento de búsqueda adoptado.

Podemos adoptar el método de gradiente conjugado por la sencillez en su programación y por otras ventajas, como velocidad y bajos requerimientos de memoria. Existen otras técnicas de búsqueda de gradiente, pero dichos métodos resultan ser más complejos y la mayoría de ellos requiere del almacenamiento de una matriz hessiana de orden N, donde N es el número de variables de decisión.

El procedimiento para el método de gradiente conjugado es:

1) Determinar un conjunto de direcciones de búsqueda utilizando la ecuación [8], basándose en la solución inicial dada y en los valores estimados λ. Denotemos estas direcciones de búsqueda por d_t.

2) Utilizar un procedimiento de búsqueda unidimensional para determinar el tamaño de paso α que maximice la función hamiltoniana, es decir:

$$\underset{\alpha}{Max}\, J\,(u_t+\alpha\, d_t, x_t, \lambda_t) \qquad [9]$$

sujeto a

$$u_t^1 = u_t^0 + \alpha\, d_t \qquad [10]$$

$$u_t^1 = \begin{cases} u_{i,\ \min} & \text{si } u_{it} \leq u_{i,\ \min} \\ u_{i,\ \max} & \text{si } u_{it} \leq u_{i,\ \max} \\ u_{it} & \text{otro caso} \end{cases} \qquad [11]$$

y sujeto a: sistemas de ecuaciones (2), para t = 1, 2, ... T
donde:

u_t^1= controles revisados en el tiempo t
u_t^0 = controles de iteración previa
d_t = dirección de búsqueda
α = tamaño del paso óptimo

3) Calcular el nuevo gradiente de la función hamiltoniana utilizando las trayectorias revisadas de estado y de control. Denotar el gradiente revisado como v_t. Si $\| v_t \| \leq \varepsilon$ donde ε es un límite preestablecido en convergencia, y así termina el procedimiento. De otra manera ir a 4.

4) Calcular una nueva dirección de búsqueda para la siguiente iteración basada en la ecuación:

$$d_t = v_t + \|v_t\| / \|d_t\| \, d_t \qquad [12]$$

y repetir el procedimiento desde el paso 2.

La ecuación [11] se conoce como la función de saturación y ofrece un mecanismo para el tratamiento de las cotas superiores e inferiores de las variables de control. Este procedimiento simplemente trunca las variables de control que caen fuera de los límites de las cotas superiores e inferiores a los valores respectivos de las cotas.

El algoritmo general, considerando todo lo anterior y basándose en el principio del máximo de Pontryagin para un problema general de optimización, consiste en:

1) Empezar con una trayectoria de control inicial.

2) Utilizar la ecuación de estado para determinar la trayectoria de estado.

3) Resolver la ecuación de transversatilidad para λ_{T+1} y a continuación la ecuación adjunta para λ_t para t = T, T - 1, ..., 1 (hacia atrás).

4) Actualizar las variables de control basadas en un algoritmo de gradiente conjugado. Si el vector gradiente de la función hamiltoniana se ha reducido al límite de tolerancia requerido, ε , se ha encontrado la solución. En otro caso, repetir el procedimiento a partir del paso 2.

A continuación se presenta el modelo propuesto para determinar políticas de migración conforme a un crecimiento poblacional preestablecido. Se consideran dos casos:

1) Distrito Federal.

2) Distrito Federal, Estado de México y el resto de la República.

Caso 1. Distrito Federal

Con el fin de validar el modelo propuesto de control óptimo se consideró el caso del Distrito Federal. El problema demográfico consiste en conocer la cantidad de población del Distrito Federal durante un periodo de estudio con la restricción de una política de migración. Es decir, suponiendo el hecho de que es posible controlar el flujo migratorio, el modelo matemático encuentra el saldo neto migratorio óptimo para el Distrito Federal durante dicho periodo, así como el tamaño óptimo de población para la entidad.

El modelo requiere de cotas permitidas para el tamaño de la población y para el saldo neto migratorio. Asimismo, suponemos que se cuenta con una política migratoria para el Distrito Federal, es decir, se conocen las cifras del saldo neto deseado para el periodo de estudio.

Por otra parte, dada la estabilidad de los índices de mortalidad y fecundidad en México, se propone un pronóstico para el crecimiento natural de la población (diferencia entre nacimientos y muertes) durante el periodo de estudio.

La validación consistió en tomar los datos históricos para el Distrito Federal durante el periodo de 1982 a 1995. Con ello se encontró que los resultados obtenidos por el modelo fueron consistentes y parecidos a los reales.

Modelo conceptual del Distrito Federal

$$\boxed{\text{Distrito Federal}}$$
$$\downarrow u_1$$

La población del Distrito Federal en 1981 fue de: 9 355 189.[1]

[1] INEGI, *Estadísticas vitales,* Dirección General de Estadística.

Consideremos que la política de migración para el Distrito Federal de 1981 a 1995 (en miles) está dada por:[2]

CUADRO 1
Política de migración para el Distrito Federal entre 1981-1995 (en miles)*

1981	*1982*	*1983*	*1984*	*1985*	*1986*	*1987*	*1988*	*1989*	*1990*	*1991*	*1992*	*1993*	*1994*	*1995*
80	78	90	83	84	94	113	110	1 213	1 203	163	167	115	104	79

* Obtenida mediante la ecuación de balance demográfico: MN= CT - N + M, donde M es la migración neta, CT es el crecimiento total, N son los nacimientos y D son las defunciones.

El crecimiento natural (nacimientos-muertes) de la población pronosticado para dicho periodo es:

CUADRO 2
Nacimientos-muertes en el Distrito Federal entre 1981 y 1995 (en miles)

1981	*1982*	*1983*	*1984*	*1985*	*1986*	*1987*	*1988*	*1989*	*1990*	*1991*	*1992*	*1993*	*1994*	*1995*
238	234	241	226	215	215	224	211	199	189	183	188	186	175	151

Fuente: INEGI, *Anuario estadístico de los Estados Unidos Mexicanos,* Dirección General de Estadística.

El modelo matemático es:

$$Min\,F=\sum_{j=1}^{nx}\ \sum_{i=1}^{T}\ (d_{ji}-u_{ji})^2 \qquad [1]$$

$$\text{s.a. } x_{t+1}=x_t+q_t+u_t+Ru_t \qquad [2]$$

$$x_{\min}\leq x_{t+1}\leq x_{\max} \qquad [3]$$

$$u_{\min}\leq u_t\leq u_{\max} \qquad [4]$$

donde:

x_t= población total en el año t
u_t= saldo migratorio neto en el año t
d_{ji}= saldo migratorio *deseado* en el año i para la entidad j
$x_{\max}$, $x_{\min}$ = cotas para la población total en el año t
$u_{\max}$, $u_{\min}$ = cotas para la migración neta en el año t

[2] Para este caso, dicha política coincide con el saldo neto migratorio real para el Distrito Federal en dicho periodo. El saldo neto para el Distrito Federal durante este periodo fue negativo, es decir, salió más gente en cada año de la que entró.

q_t = crecimiento natural en el año t (nacimientos – muertes)

R_{ij} = matriz de rutas. Donde el estado i recibe población del estado j

$F_t(.)$ = beneficio social incremental en el periodo t

$\emptyset(x_{T+1})$ = beneficio social en el último periodo.

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el estado i recibe población del estado j} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Se desea cumplir con una política de migración propuesta mediante la minimización cuadrática del saldo migratorio deseado y el saldo migratorio estimado bajo las restricciones de que la población de un periodo depende de la población del periodo anterior, el crecimiento natural y el saldo migratorio que se desea alcanzar; así como las restricciones sobre las cotas en los tamaños de población y en los valores del saldo neto migratorio.

Se diseñó un código en lenguaje C++ basado en el algoritmo de control óptimo antes señalado.

El método de búsqueda utilizado fue el dicotómico y el método de gradiente empleado fue el de Fletcher-Reeves.

El tiempo de ejecución fue de 33 centésimas de segundo.

Los resultados obtenidos por el modelo de control óptimo, comparados con los valores reales, se presentan a continuación:

CUADRO 3
Población estimada del Distrito Federal entre 1981 y 1985 (en miles)

1981	9 355
1982	9 513
1983	9 669
1984	9 820
1985	9 963
1986	10 094
1987	10 215
1988	10 326
1989	10 427
1990	9 413
1991	8 399
1992	8 419
1993	8 440
1994	8 511
1995	8 582

CUADRO 4
Población real del Distrito Federal entre 1981 y 1985 (en miles)

9 355 189
9 510 136
9 659 736
9 800 831
9 931 412
10 051 952
10 162 607
10 263 580
9 249 662
8 235 744
8 256 045
8 276 345
8 276 345
8 276 345
8 489 007

Fuente: INEGI, *Estadísticas Vitales,* Dirección General de Estadística.

CUADRO 5
Política migratoria estimada entre 1981 y 1995 (en miles)*

Distrito Federal	
1981	80
1982	78
1983	90
1984	83
1985	84
1986	94
1987	113
1988	110
1989	1 213
1990	1 203
1991	163
1992	167
1993	115
1994	104
1995	79

* Las cantidades representan un saldo neto migratorio negativo.

CUADRO 6
Saldo neto migratorio real 1982 y 1995 (en miles)

Distrito Federal	
1982	78 506
1983	90 986
1984	83 495
1985	84 692
1986	94 923
1987	113 232
1988	110 531
1989	1 213 516
1990	1 203 005
1991	163 232
1992	167 838
1993	115 649
1994	104 178
1995	79 714

Los resultados obtenidos nos muestran que el modelo de control óptimo satisface cada uno de los valores de la política migratoria propuesta. Observamos también que los tamaños de población estimados se aproximan a los reales.

CUADRO 7
Población estimada - población censal (en miles)

Año	*Diferencia*
1981	0
1982	3
1983	10
1984	20
1985	32
1986	43
1987	53
1988	63
1989	1 178
1990	1 178
1991	143
1992	173
1993	164
1994	235
1995	93

CUADRO 8
(Pob. estimada - pob. censal)/ pob. estimada (en porcentajes)

Año	%
1981	0
1982	.03
1983	.10
1984	.20
1985	.32
1986	.42
1987	.51
1988	.61
1989	11.29
1990	12.51
1991	1.70
1992	2
1993	1.94
1994	2.76
1995	1.08

Caso 2. Distrito Federal y Estado de México

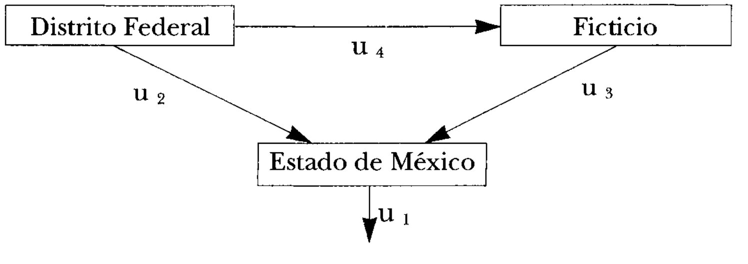
Consideremos el problema de control óptimo multidimensional de tres nodos interrelacionados. Es el caso del Distrito Federal, el Estado de México y un estado ficticio que representa al resto de la República Mexicana.

La interrelación entre estos tres estados se da mediante la expulsión de población del Distrito Federal hacia el Estado de México y hacia el resto de la República; así como la expulsión de población del resto del país hacia el Estado de México.

Se dan los mismos supuestos del caso anterior, únicamente se agregan dos estados más. Además, suponemos que 10% de población que sale del Distrito Federal va hacia el resto de la República (u_4) y el restante 90% entra al Estado de México(u_2). Para el caso de u_3, esta variable representa lo que sale del resto de la República hacia el Estado de México.

El periodo de estudio es de 1989 a 1995.

Modelo conceptual de los tres estados



La población del Distrito Federal en 1989 fue de: 9 249 662
y la del Estado de México para el mismo año: 10 690 480[3]

Consideremos que la política de migración para el Distrito Federal de 1981 a 1995 (en miles) está dada por:[4]

[3] INEGI *Estadísticas vitales,* Dirección General de Estadística.

[4] Obtenida mediante la ecuación de balance demográfico: MN = CT – N + M, donde M es la migración neta, CT es el crecimiento total, N son los nacimientos y D son las defunciones.

CUADRO 9
Política de migración para el Distrito Federal entre 1990-1995 **(en miles)**

Hacia	*1990*	*1991*	*1992*	*1993*	*1994*	*1995*
Estado de México	1 083	147	150	103	93	71
Resto de la República	120	16	17	12	11	8

El crecimiento natural (nacimientos-muertes) de la población pronosticado para dicho periodo es:

CUADRO 10
Nacimientos-muertes en el Distrito Federal y el Estado de México entre 1990 **y 1995 (en miles)**

	1990	*1991*	*1992*	*1993*	*1994*	*1995*
Estado de México	267	262	294	333	263	262
Distrito Federal	189	183	188	186	175	151

Fuente: INEGI, *Anuario Estadístico de los Estados Unidos Mexicanos*, Dirección General de Estadística.

Los resultados obtenidos por el modelo de control óptimo, comparados con los valores reales, se presentan a continuación:

CUADRO 11
Población estimada entre 1989 y 1995 **en el Distrito Federal y el Estado de México (en miles)**

	Distrito Federal	*Estado de México*
1989	9 249	10 690
1990	8 235	9 815
1991	8 255	10 260
1992	8 277	10 704
1993	8 349	11 048
1994	8 421	11 381
1995	8 494	11 715

CUADRO 12
Política migratoria estimada del Distrito Federal entre 1990 y 1995 **(en miles)**

Hacia	*1990*	*1991*	*1992*	*1993*	*1994*	*1995*
Estado de México	1 083	147	150	103	93	71
Resto de la República	120	16	17	12	11	8

CUADRO 13
Política migratoria estimada del resto del país hacia el Estado de México entre 1990 y 1995 (en miles)*

Hacia	*1990*	*1991*	*1992*	*1993*	*1994*	*1995*
Estado de México	–2 225	36	0	–92	–23	1

* El signo negativo indica la población que sale del Estado de México hacia el resto del país. Las cifras positivas indican la población que sale del resto del país hacia el Estado de México.

Conclusiones

Se puede observar que en los dos casos planteados se contó con una política de migración, la cual fue alcanzada utilizando el modelo de control óptimo propuesto. Cabe señalar que el modelo encuentra las trayectorias de dos tipos de variables: las de estado (representadas por los tamaños de población estimado) y las de decisión (representadas por el saldo neto migratorio estimado). Se puede también observar que este modelo es multidimensional dado que considera la relación entre dos estados (Distrito Federal y Estado de México) y que, a diferencia de otros modelos matemáticos, obtiene una solución analítica.

Con la información del país, el modelo propuesto puede obtener los tamaños de población y la política migratoria hasta para cinco entidades interrelacionadas en un equipo PC. Es importante señalar que los resultados obtenidos siempre serán mejores que los que pudiese arrojar un modelo de simulación.

En relación con una política migratoria futura para el Distrito Federal y el Estado de México, el modelo permite conocer el comportamiento que estas entidades deberían alcanzar, en cuanto a sus tamaños de población en un cierto horizonte de planeación, para cumplir con dicha política. Es decir, el verificar el cumplimiento de una política migratoria se restringe a verificar el tamaño de población de cada entidad bajo estudio.

Finalmente, estamos conscientes de las limitaciones del modelo y la confiabilidad de la información utilizada. El presente trabajo intenta únicamente acercar el uso de modelos de optimización al área demográfica.

Bibliografía

Albuquerque, F. y P. Swamee (1994), "Design of Open-Channel-Contraction Transitions", *Journal of the Irrigation and Drainage Engineering*, vol. 120, núm. 3, pp. 660-668.

Hernández-Hernández, D. y O. Hernández-Lerma (1995), "Linear Programming and Infinite Horizon Problems of Deterministic Control Theory", *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, vol. 1, núm. 1, pp. 59-72 (3a. serie).

Hernández-Lerma, O. y W. J. Runggaldier (1994), "Monotone Approximations for Convex Stochastics Control Problems", *Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control*, vol. 4, núm. 1, pp. 99-140.

Papageorgiou, M. (1985), "Optimal Multireservoir Network Control by the Discrete Maximum Principle", *Water Resources Research*, vol. 21, núm.12.

Partida Bush, V. (1995), *Migración interna*, tomo II, México, INEGI.

Romero, A. (1990), "Uso de un código de programación dinámica para la determinación de políticas de operación de presas", trabajo presentado en el XI Congreso Nacional de Hidráulica, Zacatecas (mimeo.).

Shim, S. y J. Labadie (1994), "Development of Hydro-Scheduling Model for Optimal Join Operation of Multireservoir Systems", trabajo presentado en la 21st National Conference, Water Resources and Management Division, Denver, ASCE.